目次

情報・ナノマテリアル工学 II

講義ノート

2008 年 4 月 7 日〜7 月 14 日

近藤高志

tkondo@castle.t.u-tokyo.ac.jp

0　はじめに

0.1　講義の性格

超高速大容量データ通信の根幹をなす光ファイバ通信技術，大容量情報記録に不可欠な光ディスクなどのテクノロジーを支える光デバイスの基礎を学ぶ。この講義では，光の伝搬やそれを制御する導波路などの基本を習得した上で，光ファイバや発光ダイオード，半導体レーザに代表される基本的な各種光デバイスの原理を理解し，それらが実際のシステムの中でどのように利用されているかを学ぶ。また，代表的な光デバイス材料である化合物半導体の特徴とそれを利用した材料設計・デバイス設計の基礎と，量子効果を用いた高機能化の実際も理解する。マテリアル工学科 3 年冬学期のマテリアル光物性学の内容と同程度の知識を前提とする。

0.2　参考書

この講義では教科書は指定しない。この講義ノートで可能なかぎりカバーする予定。光デバイス関連の教科書は多数出版されているが，参考書としては以下のものを推奨する。

- 「Fundamentals of Photonics, Second Edition」 B.E.A. Saleh, M.C. Teich 著（Wiley Interscience）
  光学の基礎から各種光デバイスの実際まで，広い範囲をカバーした大部（ほぼ 1200 ページ！）の教科書。学部上級から大学院初級程度のレベルで，最も標準的な教科書といえる。少々高価（Amazon.com で$140.00）だが，どれか 1 冊ということならばこれを推薦する。
- 「光エレクトロニクス（上・下）」 ヤリーブ著（丸善）
  大御所 A. Yariv の大部の教科書。光エレクトロニクス分野の最も標準的な教科書と言ってよい。ただし，改訂に改訂を重ねた結果，いろいろな記述間の不整合が目立つようになってしまった。こうした矛盾，間違いなどに注意して批判的に読むと大変勉強になる。それでも，光技術で将来身を立てていこうと考えるならば，現時点では最高の教科書である。大学院上級レベル。この翻訳書は原書第 5 版 (Optical Electronics in Modern Communications, 5th edition) に基づいたものだが，既に第 6 版 (Photonics: Optical Electronics in Modern Communications, 6th edition, by Amnon Yariv and Pochi Yeh, Oxford University Press) が出版されているので，むしろこの原書のほうをお薦めする。
- 「半導体レーザ」 伊藤良一・中村道治共編（培風館）
  半導体レーザを実用デバイスにするのに大きな貢献をした研究者による教科書。半導体レーザに関する教科書はいくつも刊行されているが，この教科書は最もバランスが取れていて，今でも最もお薦めできる。
- 「高校数学でわかる半導体の原理」 竹内淳著（講談社 Blue Backs）

Blue Backs を侮ってはいけない。大変読みやすいので，一読することをお勧めする。

- 「Nonlinear Optics, Second Edition」 R.W. Boyd 著 (Academic Press)
  非線形光学の日本語の教科書は残念ながら推薦できるものがない。この英文の教科書は，非線形光学のものとしては現在おそらく世界で最も売れているものである。バランスの取れた標準的な教科書といえるが，SI 単位系でなく cgs 単位系で書かれているのが残念。

0.3 講義の概要と進め方

講義は以下のスケジュールで 13 回おこなう予定である。

1)	4/ 7	イントロダクション，光技術と光産業
2)	4/14	ガウシアンビームの伝搬とその集光
3)	4/21	パルス光の伝搬
	4/28	（休講）
4)	5/12	光導波路の基礎
5)	5/19	光導波路への光結合，アレイ導波路型回折格子 (AWG)，光ファイバ
6)	5/26	半導体における光過程と光デバイス
7)	6/ 2	半導体受光素子と発光ダイオード
8)	6/ 9	レーザの基礎
9)	6/16	半導体レーザの基礎
10)	6/23	化合物半導体のバンドギャップエンジニアリングと半導体レーザの開発
11)	6/30	高機能半導体レーザ
12)	7/ 7	非線形光学の基礎
13)	7/14	非線形光学デバイス

レポート提出（2 回の予定）を義務づける。成績評価は提出されたレポートに基づいておこなう。講義内容の理解を助けるためのものなので必ず自力で解答すること。

講義の中でわからないことがあれば遠慮なく**その場で**質問してもらいたい。講義に関する質問，要望などはメールでも受け付けるが，質問は他の受講生にとっても有益である場合が多いので，できるだけ教室でしてもらいたい。

この講義ノートとレポート課題の解答などは，順次，以下のウェブページで公開する。

http://castle.t.u-tokyo.ac.jp/lecture/

この講義に関する要望などは電子メール (tkondo@castle.t.u-tokyo.ac.jp) でも受け付ける。

1　レーザ光の伝搬

1.1　レーザ光の回折

光は古典的には電磁波であるので，その振舞いは Maxwell 方程式に従う。非磁性体中のレーザ光の伝搬は光電場 $\boldsymbol{E}$ に対する以下の波動方程式によって記述される。

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

$c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$，$\epsilon_r = n^2$ の関係を用いると，この波動方程式は

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2}$$

と書きなおせる。角振動数 ω の単色光を考え，

$$E(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{1.3}$$

としよう。ここで，E は光電場ベクトルの直交座標成分の一つである。式 (1.3) を式 (1.2) に代入するとただちに

$$\nabla^2 u + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} u = 0 \tag{1.4}$$

が得られる。光は，当然，波としての重要な特徴をすべて示し，**干渉 (interference)** と**回折 (diffraction)** が起こる。ここでは回折についてみてみよう。

1.1.1　フラウンホーファ回折

以下では，ほぼ z 軸方向に伝搬するビームを考えることにしよう。$z = 0$ における複素電場振幅

$$u^{(\mathrm{i})}(x, y) \equiv u(x, y, 0) \tag{1.5}$$

が与えられた時に，$z = L$ における電場振幅

$$u^{(\mathrm{o})}(x, y) \equiv u(x, y, L) \tag{1.6}$$

がどのようになるかを考えてみたい。

波数 $\boldsymbol{k}$ ($|k| = n\omega/c = 2\pi n/\lambda$) を有する平面波 $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})$ はスカラー波動方程式 (1.4) を満足するので，それらの線形な重ね合わせ

$$u(x, y, z) = \int \mathrm{d}k_x \int \mathrm{d}k_y \; F(k_x, k_y) \exp\left[\mathrm{i}(k_x x + k_y y) + \mathrm{i}\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\, z\right] \tag{1.7}$$

もまた式 (1.4) の解である。ここで，$F(k_x, k_y)$ は任意の関数である。式 (1.7) から，

$$u^{(\mathrm{i})}(x, y) \equiv u(x, y, 0) = \int \mathrm{d}k_x \int \mathrm{d}k_y \; F(k_x, k_y) \exp\left[\mathrm{i}(k_x x + k_y y)\right] \tag{1.8}$$

であることがわかるが，これは $u^{(\mathrm{i})}(x, y)$ が $F(k_x, k_y)$ の 2 次元逆フーリエ変換であることを示している。したがって，$F(k_x, k_y)$ は $u^{(\mathrm{i})}(x, y)$ の 2 次元フーリエ変換

$$F(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \; u^{(\mathrm{i})}(x, y) \exp\left[-\mathrm{i}(k_x x + k_y y)\right] \equiv \widetilde{u^{(\mathrm{i})}}(k_x, k_y) \tag{1.9}$$

で与えられる。したがって，式 (1.7) は

$$u(x,y,z) = \int \mathrm{d}k_x \int \mathrm{d}k_y\ \widetilde{u^{(\mathrm{i})}}(k_x,k_y) \exp\left[\mathrm{i}(k_x x + k_y y) + \mathrm{i}\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\, z\right] \tag{1.10}$$

と書き換えられる。

伝搬方向がほぼ z 軸に平行なビームを考えているので，$|k_x|, |k_y| \ll |k|$ としてよい（近軸条件)。すると，$\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \simeq k[1 - (k_x^2 + k_y^2)/2k^2]$ と近似できるので，式 (1.10) は

$$\begin{aligned} u^{(\mathrm{o})}(x,y) &\equiv u(x,y,L) \\ &= \exp(\mathrm{i}kL) \int \mathrm{d}k_x \int \mathrm{d}k_y \left[\widetilde{u^{(\mathrm{i})}}(k_x,k_y) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} L\right)\right] \exp\left[\mathrm{i}(k_x x + k_y y)\right] \end{aligned} \tag{1.11}$$

となる。この式は，$\widetilde{u^{(\mathrm{i})}}(k_x,k_y)$ と $\exp\{-\mathrm{i}[(k_x^2 + k_y^2)/2k]L\}$ の 2 つの関数の積の逆フーリエ変換となっている。$\widetilde{u^{(\mathrm{i})}}(k_x,k_y)$ は $u^{(\mathrm{i})}(x,y)$ のフーリエ変換，$\exp\{-\mathrm{i}[(k_x^2 + k_y^2)/2k]L\}$ は

$$p(x,y) \equiv \int \mathrm{d}k_x \int \mathrm{d}k_y \exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} L\right) \exp\left[\mathrm{i}(k_x x + k_y y)\right] = \frac{2\pi \mathrm{i}k}{L} \exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2 + y^2}{2L}\right) \tag{1.12}$$

のフーリエ変換であるので，$u^{(\mathrm{o})}(x,y)$ は，$u^{(\mathrm{i})}(x,y)$ と $p(x,y)$ のたたみ込み積分

$$\begin{aligned} u^{(\mathrm{o})}(x,y) \equiv u(x,y,L) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}y' u^{(\mathrm{i})}(x',y') p(x-x', y-y') \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\lambda L} \exp(\mathrm{i}kL) \int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}y' u^{(\mathrm{i})}(x',y') \exp\left\{\frac{-\mathrm{i}k}{2L}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]\right\} \end{aligned} \tag{1.13}$$

で与えられる。この式が，よく知られた**フレネル-キルヒホッフの回折積分**である。$u^{(\mathrm{i})}(x',y')$ を与える開口が十分に小さく，$(x-x')^2 \simeq x^2 - 2x'x$，$(y-y')^2 \simeq y^2 - 2y'y$ としてよい場合には，式 (1.13) は以下のように簡略化できる。

$$u^{(\mathrm{o})}(x,y) = \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}kz}}{\lambda z} \exp\left[-\mathrm{i}\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}y'\ u^{(\mathrm{i})}(x',y') \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{z}(x'x + y'y)\right] \tag{1.14}$$

この近似が許されるほど $z = L$ が大きい（すなわち遠方の）領域を**フラウンホーファ領域**といい，その領域で現れる回折を**フラウンホーファ回折 (Fraunhofer diffraction)** とよぶ。フラウンホーファ回折像（これは光デバイスの分野ではしばしば**遠視野像 (far-field pattern, FFP)** とよばれる）は“入力”像（こちらは**近視野像 (near-field pattern, NFP)** とよばれる）の 2 次元フーリエ変換となる。

1.1.2　フラウンホーファ回折の例

いくつかの代表的な**開口 (aperture)** についてフラウンホーファ回折像がどのようになるか見てみよう。

まず，最初に，辺の長さ $2a \times 2b$ の矩形開口による回折を見てみよう。この場合のフラウンホーファ回折像は，式 (1.14) より，

$$\begin{aligned} |u^{(\mathrm{o})}(x,y)| &= \frac{1}{\lambda z} \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x' \int_{-b}^{b} \mathrm{d}y' \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{z}(x'x + y'y)\right] \\ &= \frac{ab}{\lambda z} \mathrm{sinc}\left(\frac{2\pi ax}{\lambda z}\right) \mathrm{sinc}\left(\frac{2\pi by}{\lambda z}\right) \end{aligned} \tag{1.15}$$

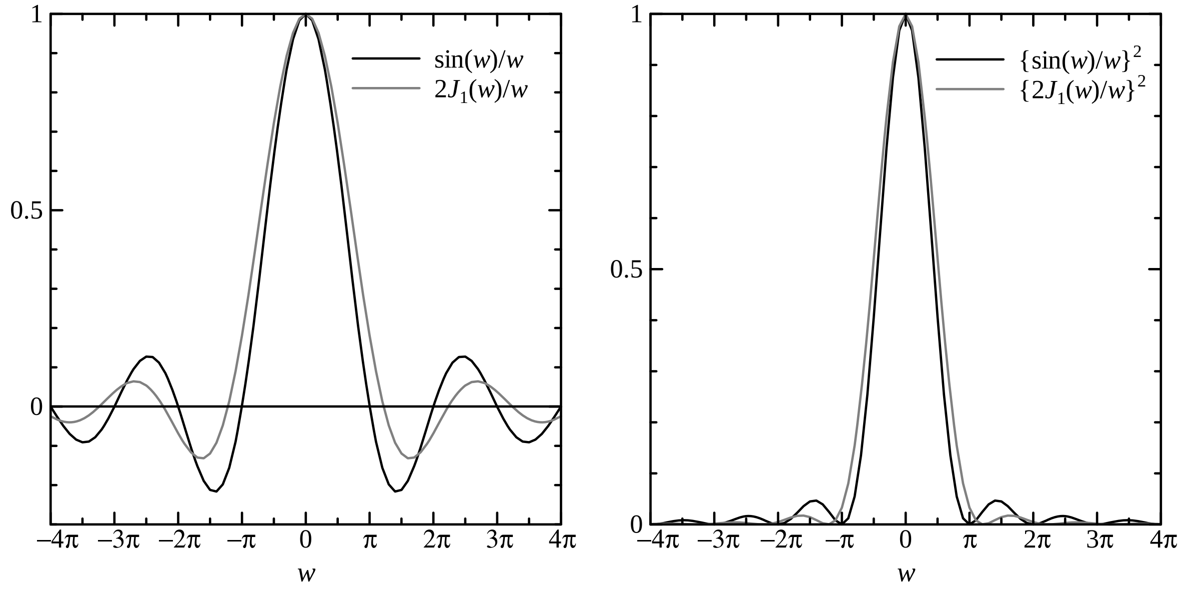

図 1　矩形開口と円形開口の回折像。左は電場振幅，右は強度。

となる。ここで，$\mathrm{sinc}(w) \equiv \frac{\sin(w)}{w}$ は sinc 関数である。また，強度分布は

$$I(x, y) = |u^{(\mathrm{o})}(x, y)|^2 = \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{2\pi ax}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2\pi by}{\lambda z}\right) \tag{1.16}$$

で与えられる。**図1**に関数 $\mathrm{sinc}\,w$ と $\mathrm{sinc}^2 w$ を示す。回折パターンのエネルギーのほとんどは sinc 関数のメインローブ ($|w| = |2\pi ax/\lambda z| < \pi$) に集中する。つまり，回折パターンの x 方向の広がり角は

$$2\Delta\theta_x \simeq 2\frac{x_{\max}}{z} = \frac{\lambda}{a} \tag{1.17}$$

で与えられる。この式は，回折の広がり角は光の波長に比例し，開口幅に反比例する，という回折の基本的な性質をあらわしている。

次に半径 a の円形開口について考えよう。結果だけ示すと，

$$|u^{(\mathrm{o})}(r)| = \frac{\pi a^2}{\lambda z}\frac{2J_1(2\pi ar/\lambda z)}{(2\pi ar/\lambda z)} \tag{1.18}$$

となる。ここで，J_1 は 1 次の第一種ベッセル関数である。**図1**に関数 $2J_1(w)/w$ と $[2J_1(w)/w]^2$ を図示した。回折パターンは中央の円盤とその周りのリングからなり，これは**エアリーディスク (Airy disc)** とよばれる。円形開口の回折の広がり角は

$$2\Delta\theta \simeq 2\frac{r_{\max}}{z} = 1.22\frac{\lambda}{a} \tag{1.19}$$

となり，矩形開口の場合より若干大きくなる。

1.2　ガウシアンビームの伝搬

1.2.1　一様媒質中のガウシアンビーム

近視野像と遠視野像が同じ形になるビーム，どの位置でも同じ断面形状を持つビームが**ガウシアンビーム (Gaussian beam)** である。レーザ工学・光エレクトロニクスで最もよくお目にかかるのが，

この伝搬方向と垂直な面内での強度分布がガウス関数（ガウシアン）となるガウシアンビームである。実際，よく制御されたレーザビームの空間パターン（レーザの**横モード (transverse mode)** とよばれる）はガウシアンとなる。

再び式 (1.4) から出発しよう。ガウシアンビームはわずかに曲率を持っているものの，z 軸方向に伝搬する波数 k の平面波に近い状態であるとして，

$$u(x, y, z) = \psi(x, y, z)\exp(\mathrm{i}kz) \tag{1.20}$$

としよう。式 (1.20) を波動方程式 (1.4) に代入して両辺に $\exp(-\mathrm{i}kz)$ をかけると

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2\mathrm{i}k\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \tag{1.21}$$

となる。平面波からのずれを表す ψ の z 方向の変化は緩やかであるとして $\partial^2\psi/\partial z^2$ を無視すると

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2\mathrm{i}k\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \tag{1.22}$$

が得られる。式 (1.22) の解として

$$\psi(x, y, z) = E_0 \exp\left\{\mathrm{i}\left[p(z) + \frac{k}{2q(z)}(x^2 + y^2)\right]\right\} \tag{1.23}$$

を仮定しよう。ここで，$p(z), q(z)$ は一般に複素数である。式 (1.23) を式 (1.22) に代入すると

$$\left[-2k\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mathrm{i}}{q}\right) + \frac{k^2}{q^2}\left(\frac{\partial q}{\partial z} - 1\right)r^2\right]\psi = 0 \tag{1.24}$$

が得られる。ここで，$r^2 = x^2 + y^2$ である。これがすべての r に対して成り立つためには r のべき乗の各項の係数が 0 でなければばならない。したがって，

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 1 \tag{1.25a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\mathrm{i}}{q} \tag{1.25b}$$

となる。式 (1.25a) からただちに

$$q(z) = z + q_0 \tag{1.26}$$

が得られる。これを式 (1.25b) に代入すると

$$\begin{aligned} p(z) &= -\mathrm{i}\ \ln(z + q_0) + C = -\mathrm{i}\ \ln\left(1 + \frac{z}{q_0}\right) + (C - \mathrm{i}\ \ln q_0) \\ &= -\mathrm{i}\ \ln\left(1 + \frac{z}{q_0}\right) \end{aligned} \tag{1.27}$$

となる。ただし，積分定数 C を $\mathrm{i}\ \ln q_0$ として定数項を消去した。ここで，q_0 を純虚数として

$$q_0 = \mathrm{i}\frac{\pi w_0^2 n}{\lambda} \tag{1.28}$$

とおくと，式 (1.23) の第 1 項は

$$\exp\left[\ln\left(1 + \mathrm{i}\frac{\lambda z}{\pi w_0^2 n}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2 n}\right)^2}} \exp\left[-\mathrm{i}\ \tan^{-1}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2 n}\right)\right] \tag{1.29}$$

となる。ここで，$\ln(a+\mathrm{i}b) = \ln\sqrt{a^2+b^2} + \mathrm{i}\tan^{-1}(b/a)$ を用いた。式 (1.23) の第 2 項は

$$\exp\left[-\mathrm{i}\frac{\frac{2\pi n}{\lambda}r^2}{2\left(\mathrm{i}\frac{\pi w_0^2 n}{\lambda}-z\right)}\right] = \exp\left\{\mathrm{i}\frac{1+\mathrm{i}\frac{\pi w_0^2 n}{\lambda z}}{\frac{\lambda z}{\pi n}\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2 n}{\lambda z}\right)^2\right]}r^2\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{r^2}{w_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2 n}\right)^2\right]} + \mathrm{i}\frac{kr^2}{2z\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2 n}{\lambda z}\right)^2\right]}\right\} \tag{1.30}$$

ここで，以下のようなパラメータを

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2 n}\right)^2} = w_0\sqrt{1+\frac{z^2}{z_0^2}} \tag{1.31a}$$

$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2 n}{\lambda z}\right)^2\right] = z\left(1+\frac{z_0^2}{z^2}\right) \tag{1.31b}$$

$$\phi(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2 n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) \tag{1.31c}$$

$$z_0 \equiv \frac{\pi w_0^2 n}{\lambda} \tag{1.31d}$$

と定義すると，最終的に $u(x,y,z)$ は

$$u(x,y,z) = E_0\frac{w_0}{w(z)}\exp\left\{\mathrm{i}[kz-\phi(z)] + \left(-\frac{1}{w^2(z)} + \mathrm{i}\frac{k}{2R(z)}\right)r^2\right\} \tag{1.32}$$

と求まる。これを**基本ガウシアンビーム (fundamental Gaussian beam)**，あるいは **0 次のガウシアンビーム (0th-order Gaussian beam)** とよぶ。

基本ガウシアンビームでは任意の z での断面の電場 $u(x,y,z)$ の振幅は $\exp(-r^2/w^2(z))$ で表されるガウシアンとなる。また，強度分布（モードパターン）は $\exp(-2r^2/w^2(z))$ となり，同様にガウシアンである。**図2**にこれらを図示した。電場振幅が $r=0$ における値の 1/e になる（強度が $1/e^2$ にな

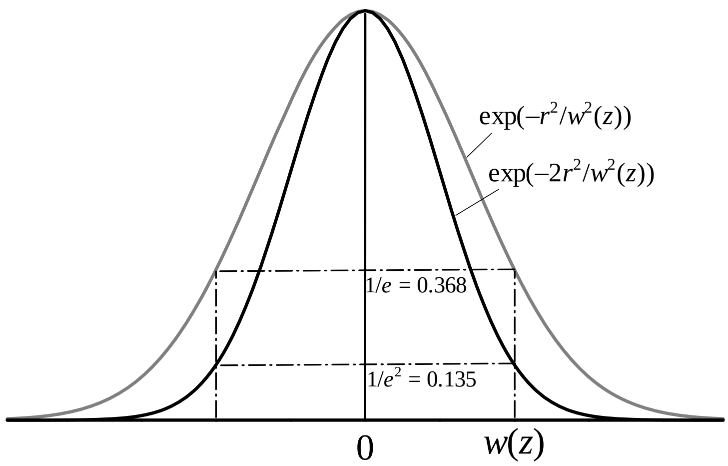

図 2　基本ガウシアンビームの電場振幅と強度分布

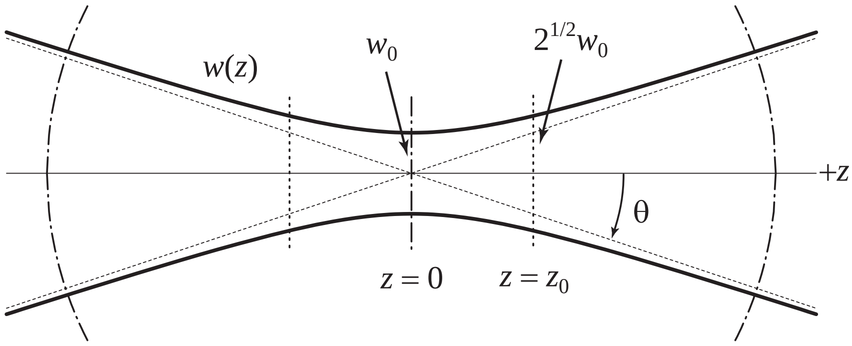

図 3　基本ガウシアンビームの伝搬

る）r の大きさ $w(z)$ をガウシアンビームの**スポットサイズ (spot size)**，あるいは $1/e^2$ 半径という。これが最小になる位置 $z = 0$ を**ビームウェスト (beam waist)** とよび，ビームウェストでのスポットサイズが w_0 である。$r = w(z)$ を与える曲線は式 (1.31a) で与えられる双曲線となる。**図3**にはスポットサイズの変化する様子を示した。$z = z_0$ では $z = 0$ と比べてスポットサイズが $\sqrt{2}$ 倍，すなわちビーム断面積が 2 倍になる。$z_0 = \frac{\pi w_0^2 n}{\lambda}$ のことを**共焦点パラメータ (confocal parameter)**，その 2 倍の $2z_0 = \frac{2\pi w_0^2 n}{\lambda}$ を**コンフォーカル長 (confocal length)** という。$|z| \ll |z_0|$ ではガウシアンビームは（ガウシアン状の強度分布を有する）平面波とみなすことができる。これに対して，$|z| \gg |z_0|$ ではガウシアンビームは原点 $(x = y = z = 0)$ に置かれた点光源から放射される球面波とみなせることを以下で示そう。原点から放射される球面波は

$$\frac{1}{R}\exp(\mathrm{i}kR) = \frac{1}{R}\exp\left(\mathrm{i}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \simeq \frac{1}{R}\exp\left(\mathrm{i}kz + \mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2R}\right) \tag{1.33}$$

と近似できる。ただし，$|x|, |y| \ll |z|$ として近似をおこなった。式 (1.33) と式 (1.32) を比較し，$z \gg z_0$ では $R(z) \simeq z$ となることを考えると，確かに，$|z| \gg |z_0|$ ではガウシアンビームは原点から放射される球面波とみなせることがわかる。また，$|z| \gg |z_0|$ ではスポットサイズを表す双曲線が次式で表される円錐に漸近していく。

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\lambda}{\pi w_0 n}z \tag{1.34}$$

これから，ガウシアンビームの広がり角 θ は

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{\pi w_0 n}\right) \simeq \frac{\lambda}{\pi w_0 n} \tag{1.35}$$

で与えられることがわかる。

1.2.2　ガウシアンビームの集光

図4に示すように，スポットサイズ w_0^i の入射ガウシアンビームのビームウェストに焦点距離 f のレンズを置いて集光した場合の出射ビームのビームウェスト位置とスポットサイズを求めよう。この種の問題は，ガウシアンビームの複素ビームパラメータ

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + \mathrm{i}\frac{\pi w_0^2 n}{\lambda}} = \frac{1}{R(z)} - \mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi n w^2(z)} \tag{1.36}$$

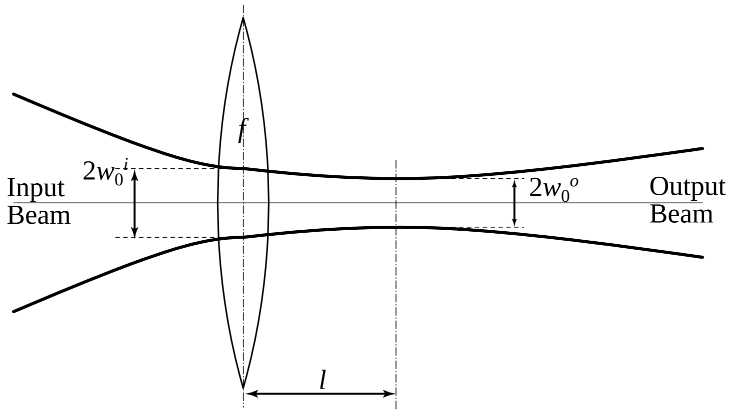

図 4　ガウシアンビームの集光

に関して，各光学部品要素の光線行列成分を使ったある種の計算を実行することで解くことができる[*1]。ここでは結果だけを示そう。レンズからビームウェストまでの距離 l は

$$l = \frac{f}{1 + \left[\frac{f\lambda}{\pi (w_0^i)^2 n}\right]^2} = \frac{f}{1 + (f/z_0^i)^2} \tag{1.37}$$

で与えられ，出射ビームウェストのスポットサイズは

$$\frac{w_0^o}{w_0^i} = \frac{f\lambda/\pi (w_0^i)^2 n}{\sqrt{1 + \left[\frac{f\lambda}{\pi (w_0^i)^2 n}\right]^2}} = \frac{f/z_0^i}{\sqrt{1 + (f/z_0^i)^2}} \tag{1.38}$$

で与えられる。ここで，$z_0^i = \frac{\pi (w_0^i)^2 n}{\lambda}$ は入射ガウシアンビームの共焦点パラメータである。

$f \ll z_0^i$ の場合について考えよう。集光スポット径は

$$2w_0^o \simeq \frac{2f w_0^i}{z_0^i} = \frac{2f\lambda}{\pi w_0^i n} \tag{1.39}$$

となる。レンズの開口をいっぱいに使えば $w_0^i \simeq D$ とできるので，

$$2w_0^o \simeq \frac{2f\lambda}{\pi D n} \simeq \frac{\lambda}{\mathrm{NA}} \tag{1.40}$$

となる。また，**焦点深度 (DOF, depth of focus)** は

$$2z_0^o = \frac{2\pi (w_0^o)^2 n}{\lambda} \simeq \frac{n\lambda}{(\mathrm{NA})^2} \tag{1.41}$$

となる。

1.3　パルス光の伝搬

ここまでは，単色のコヒーレント光の伝搬の様子を扱ってきた。単色であるとの仮定は，**連続波 (continuous wave, CW)** で発振しているレーザ光にはよくあてはまるが，光通信に用いられるよう

[*1] この計算法の詳細については，多少冗長なのでここでは示さない。興味があれば「光結合系の基礎と応用」（河野健治著，現代工学社）や Yariv の教科書などを参考にしてほしい。

な，高速変調されたレーザ光，特に**パルス (pulse)** 光ではこの仮定は破綻してしまう。以下では，このような短パルス光の伝搬について調べよう。

極めて短い時間領域にエネルギーの集中した短パルス光では，時間幅が狭くなるのに対応してエネルギー（周波数）幅が増大する。すなわち，周波数（あるいは波長）スペクトルに有限の幅が生じることになる。そのような短パルス光は単色波の重ね合わせで表すことができるが，分散性媒質中では振動数（波長）によって屈折率が異なる（そのために位相速度が異なる）ために，各振動数成分は互いに異なる位相速度で伝搬することになる。これは，通常，パルスの広がりをもたらすことになる。また，以下に示すように，パルス全体が位相速度と異なる速度で伝搬することにもつながる。

1.3.1 群速度

簡単のために，以下では，z 方向に伝搬する平面波を考えよう。スカラー光電場 $E(z,t)$ を単色平面波の重ね合わせ

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, A(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[kz-\omega(k)t]} \tag{1.42}$$

で表す[*2]。各単色平面波成分 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}[kz-\omega(k)t]}$ が波動方程式 (1.2) の解であれば，上式も同様に波動方程式の解である。式 (1.42) を式 (1.2) に代入すると

$$\omega(k) = \frac{c|k|}{n(\omega)} \tag{1.43}$$

という分散関係が得られる。今考えているレーザパルスの中心周波数を ω_0，それに対応する波数を k_0 として，式 (1.43) の $\omega(k)$ を $k = k_0$ のまわりでテイラー展開しよう。

$$\omega(k) = \omega_0 + \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0} (k-k_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k_0} (k-k_0)^2 + \dots \tag{1.44}$$

まず最初に，式 (1.44) の第 3 項以降を落として式 (1.42) に代入してみよう。

$$\begin{aligned} E(z,t) &\simeq \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, A(k) \exp\left\{\mathrm{i}\left[kz - \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0} (k-k_0)t\right]\right\} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z-\omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, A(k) \exp\left\{\mathrm{i}\left[z - \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0} t\right](k-k_0)\right\} \end{aligned} \tag{1.45}$$

この式の右辺は $z - (\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k)_{k_0} t$ のみの関数なので，

$$E(z,t) \simeq \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z-\omega_0 t)} \mathcal{E}\left(z - \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0} t\right) \tag{1.46}$$

と書ける。この式は，<u>レーザパルスがその包絡関数 $\mathcal{E}$ の形を変えずに伝搬する</u> こと，そして，パルスの伝搬速度が

$$v_g = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0} \tag{1.47}$$

で与えられることを示している。これをレーザパルスの**群速度 (group velocity)** とよぶ[*3]。一般に，$(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k)_{k_0} \neq \omega_0/k_0$ なので，群速度と位相速度は異なる。

[*2] ある時間（例えば $t=0$）でこの式を見ると，$A(k)$ が $E(z,0)$ のフーリエ変換になっていることがわかる。$|A(k)|^2$ のことを，光電場 $E(z,t)$ の**フーリエ（パワー）スペクトル**とよぶ。

[*3] これに対して，単色波の等位相面の伝搬速度 $v_p = \omega/k$ を**位相速度 (phase velocity)** とよんで区別する。

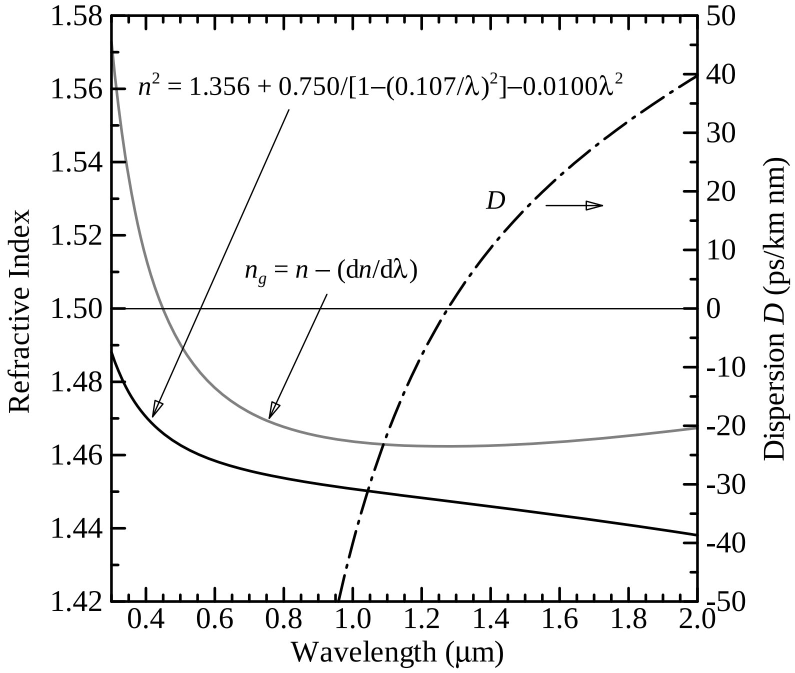

図 5　石英の屈折率 n，群速度屈折率 $n_g = n - \lambda\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)$，群速度分散 D の波長依存性。

分散関係 (1.43) は

$$k = n(\omega)\frac{\omega}{c} \tag{1.48}$$

と書き換えられる。これから容易に，位相速度は

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \tag{1.49}$$

で与えられること，そして，群速度は

$$v_g = \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \frac{c}{n + \omega(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega)} \tag{1.50}$$

で与えられることが導ける。通常の正常分散領域 ($\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega > 0$) では，群速度は位相速度よりも小さくなる。**図5**に石英の屈折率 n と群速度屈折率

$$n_g \equiv \frac{c}{v_g} = n + \omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} = n - \lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{1.51}$$

の波長依存性を示す。約 1.27 μm よりも長波長側では，短波長（高周波）になるほど群速度が大きくなることに注目せよ。

1.3.2　群速度分散

ここまでは，媒質の屈折率分散があまり大きくないか，あるいはパルスの時間幅があまり狭くないとして，式 (1.44) の第 3 項を無視して議論を進めてきた。これまでの議論から容易に推測できるように，この第 3 項以降無視できなくなると，レーザパルスの広がりが現れることになる。この高次の項による効果を**群速度分散 (group-velocity dispersion, GVD)** とよぶ。これによって，パルス幅の広がりだけでなく周波数チャーピングなども生じる。

以下では，簡単のために，ガウシアン状のパルス広がりを有する光パルスの伝搬について調べよう。入力パルスが

$$\begin{aligned} E(z=0,t) &= \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\, F(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} \end{aligned} \tag{1.52}$$

の場合を考える。ここで，$F(\Omega)$ はガウシアン状の包絡関数 $\mathrm{e}^{-\alpha t^2}$ のフーリエ変換

$$F(\Omega) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}}\ \mathrm{e}^{-\Omega^2/4\alpha} \tag{1.53}$$

である。式 (1.52) は角振動数 $\omega_0+\Omega$ の単色波の重ね合わせであり，距離 z だけ伝搬した後のパルス形状を求めるにはこの単色波成分にそれぞれ $\exp[\mathrm{i}k(\omega_0+\Omega)z]$ をかけてもう一度重ね合わせればよい。波数 $k(\omega_0+\Omega)$ を ω_0 のまわりでテイラー展開し，

$$k(\omega_0+\Omega) = k(\omega_0) + \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}\Omega + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\omega_0}\Omega^2 \tag{1.54}$$

と第 3 項まで残すことにしよう。これを用いて $z>0$ での光電場を計算すると

$$\begin{aligned} E(z,t) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\, F(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega_0+\Omega)z} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z-\omega_0 t)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\, F(\Omega)\exp\left\{-\mathrm{i}\Omega\left[\left(t-\frac{z}{v_g}\right)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)\Omega z\right]\right\} \end{aligned} \tag{1.55}$$

となる。ここで，$k_0 = k(\omega_0)$ である。光電場の包絡関数は

$$\mathcal{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\, F(\Omega)\exp\left\{-\mathrm{i}\Omega\left[\left(t-\frac{z}{v_g}\right)-a\Omega z\right]\right\} \tag{1.56}$$

で与えられ，パルス幅の広がりはパラメータ

$$a = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right) = -\frac{1}{2v_g^2}\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega} \tag{1.57}$$

で表される **1 次の群速度分散**によって引き起こされる。式 (1.56) に式 (1.53) を代入して積分を実行すると，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z,t) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\ \exp\left\{-\left[\Omega^2\left(\frac{1}{4\alpha}-\mathrm{i}az\right)-\mathrm{i}\left(t-\frac{z}{v_g}\right)\Omega\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{i}4a\alpha z}}\exp\left[-\frac{(t-z/v_g)^2}{1/\alpha+16a^2\alpha z^2}\right]\exp\left[-\mathrm{i}\frac{4az(t-z/v_g)^2}{1/\alpha^2+16a^2z^2}\right] \end{aligned} \tag{1.58}$$

が得られる。これから，距離 L だけ伝搬した後のパルス強度 ($\propto|\mathcal{E}|^2$) の半値全幅が

$$\tau(L) = \sqrt{2\ln 2}\sqrt{\frac{1}{\alpha}+16a^2\alpha L^2} = \tau(0)\sqrt{1+\left[\frac{(8\ln 2)aL}{\tau^2(0)}\right]^2} \tag{1.59}$$

となることがただちにわかる。$|aL|\gg\tau^2(0)$ が成り立つ十分遠方では，

$$\tau(L) \simeq \frac{(8\ln 2)aL}{\tau(0)} \tag{1.60}$$

となる。

実用上は，群速度分散を表すパラメータとして，

$$D \equiv \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{1}{v_g}\right) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2}\right) \tag{1.61}$$

が用いられる（光ファイバーなどで通常用いられる単位は ps/km·nm である）。ここで，T は長さ L の距離をパルスが伝搬するのに要する時間である。$D = -(2\pi c/\lambda^2)\,a$ なので，式 (1.59) は

$$\tau(L) = \tau(0)\sqrt{1+\left(\frac{2\ln 2}{\pi c}\frac{\lambda^2 DL}{\tau^2(0)}\right)^2} \tag{1.62}$$

となる。DL を ps/nm，λ を μm，τ を ps 単位で表記すると，

$$\tau(L) = \tau(0)\sqrt{1+\left(\frac{1.47\lambda^2 DL}{\tau^2(0)}\right)^2} \tag{1.63}$$

である。

ここで，もう一度，式 (1.55) に戻ろう。式 (1.55) に式 (1.58) を代入すると，

$$\begin{aligned} E(z,t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 z)}\mathcal{E}(z,t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{i}4a\alpha z}}\exp\left[-\frac{(t-z/v_g)^2}{1/\alpha+16a^2\alpha z^2}\right]\exp\left[\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 z)+\mathrm{i}\frac{4az(t-z/v_g)^2}{1/\alpha^2+16a^2z^2}\right] \end{aligned} \tag{1.64}$$

が得られる。振動の位相は

$$\phi(z,t) = \omega_0 t - k_0 z + \frac{4az(t-z/v_g)^2}{1/\alpha^2+16a^2z^2} \tag{1.65}$$

となっているので，“ある瞬間の” 角振動数は

$$\omega(z,t) = \frac{\partial\phi}{\partial t} = \omega_0 + \frac{8az}{1/\alpha^2+16a^2z^2}(t-z/v_g) \tag{1.66}$$

であることがわかる。周波数はもはや定数でなく，**チャープ (chirp)** していることがわかる。$a<0$ $(D>0)$ の分散性ファイバ中を伝搬したパルスの高周波成分は低周波成分よりも群速度が大きいために早く到着し，観測周波数は時間とともに線形に低下する。

2　光導波路の基礎

自由空間中では光は回折によって広がってしまう。光を波長程度の狭い空間の閉じ込めたい時や，長距離にわたって伝搬させたい時には，**導波路構造 (waveguiding structure)** を用いる必要がある。光エレクトロニクスの分野で最も重要なデバイスである半導体レーザと光ファイバは，いずれも典型的な光導波路デバイスである。

2.1　スラブ導波路

まず最初に，導波路の特性を理解するのに最も適したスラブ導波路についてみてみよう。**図6**のように，厚さ $t=2a$ で屈折率 n_1 の誘電体を上部から屈折率 n_3，下部から屈折率 n_2 の誘電体ではさんだ構造を考えよう。誘電体は yz 面内に無限に広がっているとし，屈折率は $n_1 > n_2 \geq n_3$ となって

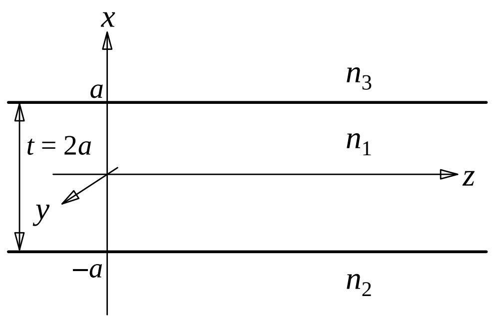

図 6　３層スラブ導波路

いるとする。このような構造中では，ある条件のもとでは，領域 1-2 の界面と領域 1-3 の界面で全反射を繰り返しながら領域 1 中に閉じ込められて z 方向に伝搬する光波の存在が可能となる（上述の屈折率の条件から全反射が可能であることが保証される）。このような構造の導波路を**スラブ導波路 (slab waveguide)**，あるいは**プレーナ導波路 (planar waveguide)** とよぶ。また，光波が閉じ込められる領域 1 を**導波層 (guiding layer)** あるいは**コア層 (core layer)**，それを両側から閉じ込める層（領域 2, 3）を**クラッド層 (cladding layer)** とよぶ。

2.1.1　対称 3 層スラブ導波路

$n_2 = n_3$ の場合，すなわち対称 3 層スラブ導波路中の光波の伝搬について調べよう。基本となる方程式は，ここでも，式 (1.2) の波動方程式と，その基となった Maxwell 方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{2.1a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = n^2 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.1b}$$

である。y 方向には無限に広いことから，電場と磁場は

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x) \exp[\mathrm{i}(\beta z - \omega t)] \tag{2.2a}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(x) \exp[\mathrm{i}(\beta z - \omega t)] \tag{2.2b}$$

の形であるとすると，波動方程式は

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + (n^2 k_0^2 - \beta^2)\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.3}$$

と書き換えられる。ここで，$k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$（$\lambda$ は真空中の波長），β は**伝搬定数 (propagation constant)** とよばれる量である。

式 (2.3) から，伝搬定数 β の値によって導波路中を伝搬する光波の振る舞いが変わることがわかる。$n_1 k_0 > n_2 k_0 > \beta$ の場合は，式 (2.3) の解は導波層・クラッド層ともに正弦波的な振動解となる。この時，光は導波層に閉じ込められず，$x = \pm\infty$ へエネルギーが放射されることになる。このような解（モード）を**放射モード (radiation mode)** という。これに対して，$n_1 k_0 \geq \beta \geq n_2 k_0$ の場合は，導波層中では正弦波的，クラッド層中では指数関数的に減衰する解となり，エネルギーが導波層中に閉じ込められた**導波モード (guided mode)** が出現する。[*4]

[*4] $\beta > n_1 k_0 > n_2 k_0$ では $x = \pm\infty$ で発散する指数関数解という物理的にありえない解しか得られない。

一方，式 (2.2a), (2.2b) を式 (2.1a), (2.1b) に代入すると次の 6 つの方程式が得られる。

$$\mathrm{i}\beta E_y = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_x \tag{2.4a}$$

$$-\mathrm{i}\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_y \tag{2.4b}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_z \tag{2.4c}$$

$$\mathrm{i}\beta H_y = \mathrm{i}\omega n^2 \epsilon_0 E_x \tag{2.4d}$$

$$-\mathrm{i}\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \mathrm{i}\omega n^2 \epsilon_0 E_y \tag{2.4e}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \mathrm{i}\omega n^2 \epsilon_0 E_z \tag{2.4f}$$

これらの式は，E_y, H_x, H_z のみを含む 3 つの式（(2.4a), (2.4c), (2.4e)）と，H_y, E_x, E_z のみを含む 3 つの式（(2.4b), ((2.4d), ((2.4f)）とに分離できる。前者の解は，電場が横方向成分のみを持つので **TE モード (transverse-electric mode)** とよばれ，後者はこれに対して，磁場が横方向成分のみとなるので **TM モード (transverse-magnetic mode)** とよばれる。

■**TE モード**　電場の横成分 E_y に注目して導波モードの振る舞いを調べよう。E_y がわかれば，式 (2.4a) と (2.4c) から導かれる

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y \tag{2.5a}$$

$$H_z = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{2.5b}$$

によって磁場を知ることができる。導波路は $x = 0$ に対して対称なので，そのモードは偶関数か奇関数でなければならない。偶モードは

$$E_y(x) = \begin{cases} A\exp[-r(x-a)] & x \geq a \\ B\cos(qx) & a \geq x \geq -a \\ A\exp[r(x+a)] & -a \geq x \end{cases} \tag{2.6}$$

とおける。ここで，それぞれが波動方程式 (2.3) を満足しなければならないので，

$$\beta^2 - r^2 = n_2^2 k_0^2 \tag{2.7a}$$

$$\beta^2 + q^2 = n_1^2 k_0^2 \tag{2.7b}$$

が成り立たたなければならない。式 (2.5b) から，磁場 H_z は

$$H_z(x) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_0} \begin{cases} -rA\exp[-r(x-a)] & x \geq a \\ -qB\sin(qx) & a \geq x \geq -a \\ rA\exp[r(x+a)] & -a \geq x \end{cases} \tag{2.8}$$

となる。$x = \pm a$ の界面において電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ の接線成分が連続でなければならないので，

$$B\cos(aq) = A \tag{2.9a}$$

$$-qB\sin(aq) = -rA \tag{2.9b}$$

となる。これから，偶 TE モードに対する固有値方程式

$$\tan(aq) = \frac{r}{q} \tag{2.10}$$

が得られる。ここで，$n_{\mathrm{eff}} \equiv \beta/k_0$ で定義される**等価屈折率 (effective index)**（**実効屈折率**ともよばれる）を導入すると，式 (2.10) と式 (2.7a), (2.7b) から，

$$\tan\left(ak_0\sqrt{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}\right) = \sqrt{\frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}} \tag{2.11}$$

すなわち，

$$\frac{t}{\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\right) + 2m\frac{\pi}{2}\right] \tag{2.12}$$

が得られる（m は任意の整数）。一方，奇モードは

$$E_y(x) = \begin{cases} A' \exp[-r(x-a)] & x \geq a \\ B' \sin(qx) & a \geq x \geq -a \\ -A' \exp[r(x+a)] & -a \geq x \end{cases} \tag{2.13}$$

$$H_z(x) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_0}\begin{cases} -rA' \exp[-r(x-a)] & x \geq a \\ qB' \cos(qx) & a \geq x \geq -a \\ -rA' \exp[r(x+a)] & -a \geq x \end{cases} \tag{2.14}$$

で与えられ，境界条件から固有値方程式

$$-\cot(aq) = \frac{r}{q} \tag{2.15}$$

が得られる。これを等価屈折率で書き直して整理すると

$$\frac{t}{\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\right) + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right] \tag{2.16}$$

となる。式 (2.12) と (2.16) を組み合わせると，結局，

$$\frac{t}{\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\right) + m\frac{\pi}{2}\right] \tag{2.17}$$

が得られる。

■TM モード　TM モードについては磁場の横成分 H_y から始めればよい。電場は

$$E_x = \frac{\beta}{\omega n^2 \epsilon_0} H_y \tag{2.18a}$$

$$E_z = -\frac{\mathrm{i}}{\omega n^2 \epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial x} \tag{2.18b}$$

で与えられる。偶モードは

$$H_y(x) = \begin{cases} C \exp[-r(x-a)] & x \geq a \\ D \cos(qx) & a \geq x \geq -a \\ C \exp[r(x+a)] & -a \geq x \end{cases} \tag{2.19}$$

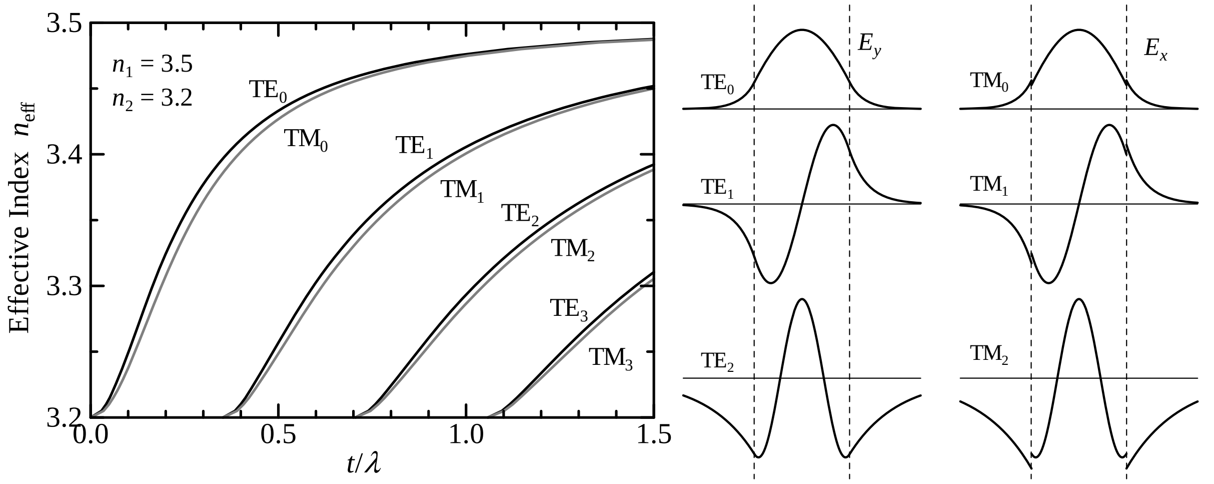

図 7　（左）対称スラブ導波路 ($n_1 = 3.5$, $n_2 = 3.2$) のモード分散曲線（横軸は波長で規格化した導波層厚）。（右）$t/\lambda = 0.8$ における各導波モードの電場分布。破線は導波層とクラッド層の境界である。

$$E_z(x) = -\frac{\mathrm{i}}{\omega\epsilon_0}\begin{cases} -\frac{rC}{n_2^2}\exp[-r(x-a)] & x \geq a \\ -\frac{qD}{n_1^2}\sin(qx) & a \geq x \geq -a \\ \frac{rC}{n_2^2}\exp[r(x+a)] & -a \geq x \end{cases} \tag{2.20}$$

で，境界条件から，次の固有値方程式が得られる。

$$\tan(aq) = \frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{r}{q} \tag{2.21}$$

これを書き直すと，

$$\frac{t}{\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\sqrt{\frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\right) + 2m\frac{\pi}{2}\right] \tag{2.22}$$

となる。奇モードについても同様に計算できて，最終的には，すべてのモードに対して

$$\frac{t}{\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\sqrt{\frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\right) + m\frac{\pi}{2}\right] \tag{2.23}$$

が得られる。

$n_1 = 3.5$, $n_2 = 3.2$ の対称スラブ導波路について計算したモード分散曲線と各導波モードの電場分布の例を**図7**に示した。これを例に取りながら，導波路中での伝搬モードの特徴についてまとめる。

1) 導波モードの伝搬定数は特定の値しか取り得ない（すなわち，導波モードは離散化される）。これは導波層内での光波の定在波条件に対応している。
2) m の値によって等価屈折率（すなわち伝搬定数）が異なる。これを**モード分散 (modal dispersion)** という。
3) 各導波モードのモード分布は式 (2.17), (2.23) の m で特徴づけられる。m は電場振幅が 0 になる節の数である。

4) 導波層厚が大きくなると m の大きいモード（高次モード）が存在できるようになる（$m = 0$ のモードを基本モードとよぶことがある）。各導波モードはある導波層厚以上でないと存在できない。この導波層厚のことをそのモードの**カットオフ (cut-off)** という。
5) 対称導波路では $m = 0$ のモード (TE_0, TM_0) のカットオフは 0 である[*5]。すなわち，対称導波路の場合，導波層厚がどれだけ小さくとも最低一つの導波モードが存在しうる。
6) 導波層厚が $m = 1$ のカットオフよりも小さい場合には $m = 0$ のモードのみが存在する。このような状態を**単一モード (single mode)**，複数のモードが存在する状態を**多モード (multi mode)** という。
7) 導波層厚が大きいほど各導波モードの等価屈折率は大きくなり（伝搬定数が大きくなり），導波層の屈折率に漸近する。導波層が厚くなると，導波モードの電場のクラッドへのしみ出しが相対的に小さくなり導波層への閉じ込めが 1 へ漸近するためである。
8) 同じ導波層厚で比較すると，m が大きいほど等価屈折率が小さい（伝搬定数が小さい）。これは，m が大きいほどクラッド層への電場のしみ出しが大きい（導波層内の閉じ込めが悪い）からである。
9) 同じ m のモードどうしを比較すると，TE モードよりも TM モードのほうが等価屈折率が小さい（伝搬定数が小さい）。TM モードのほうがクラッド層へのしみ出しが強い（導波層への閉じ込めが悪い）からである。

ここで登場したいくつかの重要なパラメータについて以下で定式化しておこう。

導波モードのカットオフは，式 (2.17), (2.23) よりただちに導出でき，TE モード，TM モードともに

$$\frac{t_{\mathrm{cutoff}}}{\lambda} = \frac{m}{2\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \tag{2.24}$$

で与えられる。

導波モードの運ぶエネルギーは，ポインティングベクトルを次のようにビーム断面積にわたって積分すれば得られる。

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \langle S_z \rangle = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_z \tag{2.25}$$

ここで，P は単位幅（y 方向）あたりの光パワーである。TE モードの場合には，

$$P = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, E_y H_x = \frac{\beta}{2\omega\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |E_y|^2 = \frac{\epsilon_0 n_{\mathrm{eff}}\, c}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |E_y|^2 \tag{2.26}$$

となるが，これに式 (2.6), (2.13) を代入し，各層の積分に分割すると，

$$P_1 = \frac{\epsilon_0 n_{\mathrm{eff}}\, c}{2}\frac{B^2}{2}\left(2a + \frac{2r}{q^2 + r^2}\right) \tag{2.27a}$$

$$P_2 = P_3 = \frac{\epsilon_0 n_{\mathrm{eff}}\, c}{2}\frac{A^2}{2r} = \frac{\epsilon_0 n_{\mathrm{eff}}\, c}{2}\frac{B^2}{2}\left(\frac{q^2}{q^2 + r^2}\right)\frac{1}{r} \tag{2.27b}$$

が得られる。ただし，$P_1 = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \langle S_z \rangle$ は導波層中のパワー，$P_{2(3)} = \int_{-\infty(a)}^{-a(\infty)} \mathrm{d}x \langle S_z \rangle$ は各クラッド層中のパワーである。したがって，トータルパワーは

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\epsilon_0 n_{\mathrm{eff}}\, c}{2}\frac{B^2}{2}\left(2a + \frac{2}{r}\right) \tag{2.28}$$

[*5] あとで見るようにこれは非対称導波路では成り立たない。

で与えられる。ここであらわれた

$$t_{\text{eff}} = 2a + \frac{2}{r} = t + \frac{2}{r} \tag{2.29}$$

を導波モードに対する**実効導波層厚 (effective guide thickness)** という。導波層へのパワー閉じ込め係数は,

$$\varGamma \equiv \frac{P_1}{P} = \frac{a + \frac{r}{q^2+r^2}}{a + \frac{1}{r}} \tag{2.30}$$

で与えられる。TM モードでは,

$$P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x E_x H_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\beta}{2\omega n^2 \mu_0}|H_y|^2 = \frac{n_{\text{eff}}}{2\epsilon_0 c}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{n^2}|H_y|^2 \tag{2.31}$$

となり，これに式 (2.19) を代入すると,

$$P_1 = \frac{n_{\text{eff}}}{2\epsilon_0 n_1^2 c}\frac{D^2}{2}\left(2a + \frac{2rn_1^2 n_2^2}{q^2 n_2^4 + r^2 n_1^4}\right) \tag{2.32a}$$

$$P_2 = P_3 = \frac{n_{\text{eff}}}{2\epsilon_0 n_2^2 c}\frac{C^2}{2r} = \frac{n_{\text{eff}}}{2\epsilon_0 c}\frac{D^2}{2}\left(\frac{q^2 n_2^2}{q^2 n_2^4 + r^2 n_1^4}\right)\frac{1}{r} \tag{2.32b}$$

が得られる。トータルパワーは

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{n_{\text{eff}}}{2\epsilon_0^2 c}\frac{D^2}{2}\left(2a + \frac{2(q^2 + r^2)n_1^2 n_2^2}{r(q^2 n_2^4 + r^2 n_1^4)}\right) \tag{2.33}$$

で与えられ，TM モードに対する実効導波層厚は

$$t_{\text{eff}} = 2a + \frac{2(q^2 + r^2)n_1^2 n_2^2}{r(q^2 n_2^4 + r^2 n_1^4)} = t + \frac{2(q^2 + r^2)n_1^2 n_2^2}{r(q^2 n_2^4 + r^2 n_1^4)} \tag{2.34}$$

導波層へのパワー閉じ込め係数は

$$\varGamma = \frac{2a + \frac{2rn_1^2 n_2^2}{q^2 n_2^4 + r^2 n_1^4}}{2a + \frac{2(q^2+r^2)n_1^2 n_2^2}{r(q^2 n_2^4 + r^2 n_1^4)}} \tag{2.35}$$

となる。

図7と同じパラメータで計算した t_{eff} と $\varGamma$ を**図8**に示す。

最後に，コア層とクラッド層の屈折率があまり大きく違わず,

$$\varDelta \equiv \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \ll 1 \tag{2.36}$$

が成り立つ場合について考えよう（このような条件が成り立つときの光波の伝搬を**弱導波 (weakly guiding)** といい，そのときに成り立つ近似を**弱導波近似 (weakly-guiding approximation)** とよぶ)。ここで，$\varDelta$ は比屈折率差とよばれる量である。[*6] この場合には，TM モードの固有値方程式 (2.21) は TE モードの固有値方程式 (2.10) と一致してしまう。すなわち，弱導波近似のもとでは TE モードと TM モードは縮退する。[*7] また，TM モードの界分布は近似的に TE モードのものと同じになる。

[*6] $n_1 \simeq n_2$ ならば $\varDelta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \simeq \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ であることから，これが比屈折率差とよばれる。

[*7] 固有値，すなわち伝搬定数（あるいは等価屈折率）が一致することを縮退とよぶ。

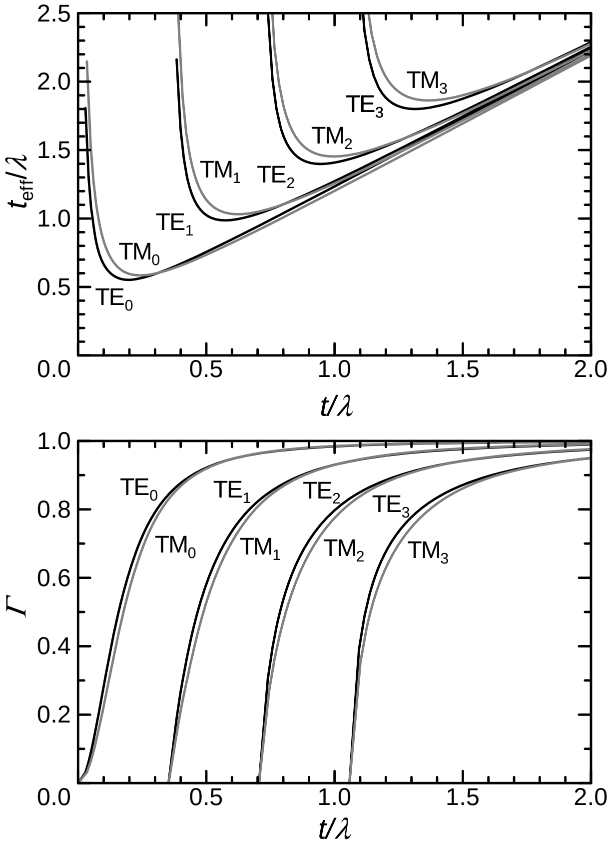

図 8　対称スラブ導波路 ($n_1 = 3.5, n_2 = 3.2$) の実効導波層厚（上）とパワー閉じ込め係数（下）。横軸は波長で規格化した導波層厚である。

2.1.2　非対称 3 層スラブ導波路

$n_2 \neq n_3$ の非対称 3 層スラブ導波路の場合についてまとめておこう。$n_1k_0 > n_2k_0 > n_3k_0 > \beta$ の場合は電磁界は導波層・下部クラッド層・上部クラッド層ともに正弦波的な振動解（放射モード），$n_1k_0 > n_2k_0 > \beta > n_3k_0$ の場合は導波層・下部クラッド層で正弦波的な振動解（下部クラッド放射モード），$n_1k_0 > \beta > n_2k_0 > n_3k_0$ の場合は導波層中では正弦波的，クラッド層中では指数関数的に減衰する導波モードが出現する。

以下では，**図9**のように 1-3 境界に $x = 0$ を設定して導波モードについて計算をすすめる。

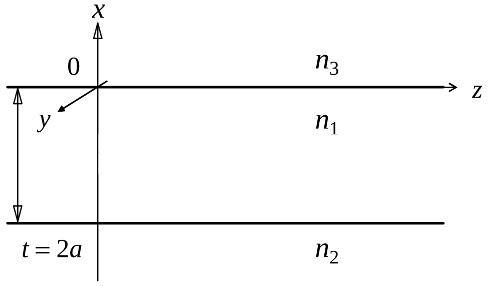

図 9　非対称３層スラブ導波路

■TE **モード**　電場 E_y は

$$E_y(x) = \begin{cases} A\exp(-rx) & x \geq 0 \\ A\cos(qx) + B\sin(qx) & 0 \geq x \geq -2a \\ [A\cos(2aq) - B\sin(2aq)]\exp[p(x+2a)] & -2a \geq x \end{cases} \tag{2.37}$$

とおける（$x = 0, x = -2a$ での連続条件を満たしていることに注意)。ここで，

$$r^2 = \beta^2 - n_3^2 k_0^2 \tag{2.38a}$$

$$q^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 \tag{2.38b}$$

$$p^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2 \tag{2.38c}$$

である。式 (2.5b) から，磁場 H_z は

$$H_z(x) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_0} \begin{cases} -rA\exp(-rx) & x \geq 0 \\ q[-A\sin(qx) + B\cos(qx)] & 0 \geq x \geq -2a \\ p[A\cos(2aq) - B\sin(2aq)]\exp[p(x+2a)] & -2a \geq x \end{cases} \tag{2.39}$$

となる。H_z の連続条件から

$$-rA = qB \tag{2.40a}$$

$$q[A\sin(2aq) + B\cos(2aq)] = p[A\cos(2aq) - B\sin(2aq)] \tag{2.40b}$$

が得られ，これから固有値方程式

$$\tan(2aq) = \frac{q(p+r)}{q^2 - pr} \tag{2.41}$$

すなわち，

$$\frac{t}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}} \left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}} + m\pi \right) \tag{2.42}$$

が得られる。カットオフは

$$\frac{t_{\mathrm{cutoff}}}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}} \right) + m\pi \right] \tag{2.43}$$

である。実効導波層厚は

$$t_{\mathrm{eff}} = 2a + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = t + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \tag{2.44}$$

導波層へのパワー閉じ込め係数は

$$\Gamma = \frac{t + \frac{p}{q^2+p^2} + \frac{r}{q^2+r^2}}{t + \frac{1}{p} + \frac{1}{r}} \tag{2.45}$$

で与えられる。

■TM **モード**　磁場 H_y は

$$H_y(x) = \begin{cases} C\exp(-rx) & x \geq 0 \\ C\cos(qx) + D\sin(qx) & 0 \geq x \geq -2a \\ [C\cos(2aq) - D\sin(2aq)]\exp[p(x+2a)] & -2a \geq x \end{cases} \tag{2.46}$$

とおける。式 (2.18b) から，電場 E_z は

$$E_z(x) = -\frac{\mathrm{i}}{\omega\epsilon_0}\begin{cases} -\dfrac{rC}{n_3^2}\exp(-rx) & x \geq 0 \\ \dfrac{q}{n_1^2}[-C\sin(qx) + D\cos(qx)] & 0 \geq x \geq -2a \\ \dfrac{p}{n_2^2}[C\cos(2aq) - D\sin(2aq)]\exp[p(x+2a)] & -2a \geq x \end{cases} \tag{2.47}$$

となる。E_z の連続条件から

$$-\frac{rC}{n_3^2} = \frac{qD}{n_1^2} \tag{2.48a}$$

$$\frac{q}{n_1^2}[C\sin(2aq) + D\cos(2aq)] = \frac{p}{n_2^2}[C\cos(2aq) - D\sin(2aq)] \tag{2.48b}$$

が得られ，これから固有値方程式

$$\tan(2aq) = \frac{n_1^2 q(n_3^2 p + n_2^2 r)}{n_2^2 n_3^2 q^2 - n_1^4 pr} \tag{2.49}$$

すなわち，

$$\frac{t}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\sqrt{\frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{n_1^2}{n_3^2}\sqrt{\frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}}\right) + m\pi\right] \tag{2.50}$$

が得られる。カットオフは

$$\frac{t_{\mathrm{cutoff}}}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{n_1^2}{n_3^2}\sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}}\right) + m\pi\right] \tag{2.51}$$

である。実効導波層厚は

$$t_{\mathrm{eff}} = t + \frac{n_1^2 n_2^2 (p^2 + q^2)}{p(n_2^4 q^2 + n_1^4 p^2)} + \frac{n_1^2 n_3^2 (q^2 + r^2)}{r(n_3^4 q^2 + n_1^4 r^2)} \tag{2.52}$$

導波層へのパワー閉じ込め係数は

$$\mathit{\Gamma} = \frac{t + \frac{n_1^2 n_2^2 p}{n_2^4 q^2 + n_1^4 p^2} + \frac{n_1^2 n_3^2 r}{n_3^4 q^2 + n_1^4 r^2}}{t + \frac{n_1^2 n_2^2 (p^2+q^2)}{p(n_2^4 q^2 + n_1^4 p^2)} + \frac{n_1^2 n_3^2 (q^2+r^2)}{r(n_3^4 q^2 + n_1^4 r^2)}} \tag{2.53}$$

で与えられる。

$n_1 = 3.5$, $n_2 = 3.2$, $n_3 = 1$ の非対称 3 層スラブ導波路について計算したモード分散曲線と各導波モードの電場分布を**図10**に示す。対称スラブ導波路との最大の違いは，TE_0, TM_0 モードのカットオフが 0 でなくなること（すなわち，導波層厚が小さすぎるとまったく導波モードが存在しないことがありえる），TE モードと TM モードのカットオフが一致しなくなる（同じモードナンバーで比較すると，TM モードのほうがカットオフ膜厚が大きい）ことである。

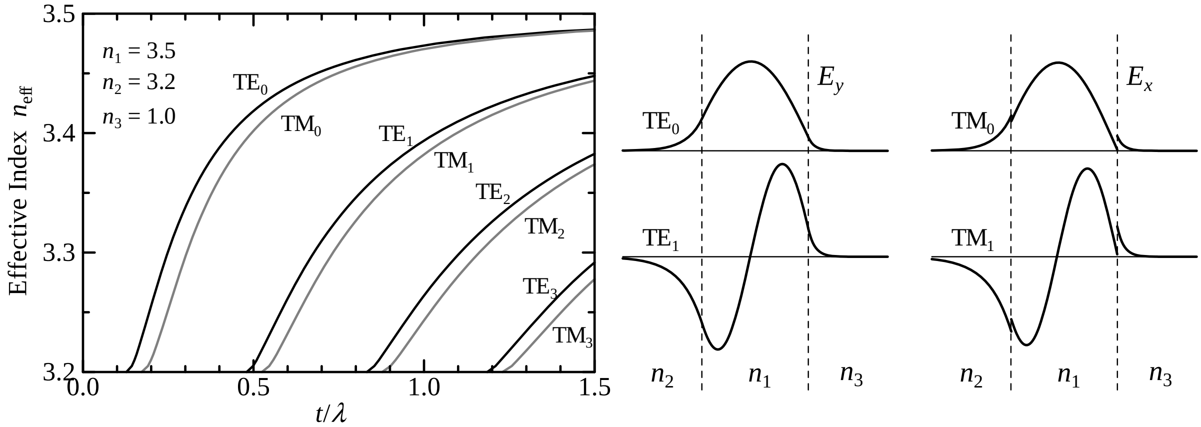

図 10 （左）非対称スラブ導波路 ($n_1 = 3.5, n_2 = 3.2, n_3 = 1.0$) のモード分散曲線。（右）$t/\lambda = 0.8$ における各導波モードの電場分布。破線は導波層とクラッド層の境界である。

2.1.3 規格化表現

ここまでに導出した 3 層スラブ導波路の固有値方程式をまとめると，

$$\frac{t}{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}} \left(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}} + \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}} + m\pi \right) & \text{（TE モード）} \\ \dfrac{1}{2\pi\sqrt{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}} \left[\tan^{-1}\left(\dfrac{n_1^2}{n_2^2}\sqrt{\dfrac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}} \right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{n_1^2}{n_3^2}\sqrt{\dfrac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_{\mathrm{eff}}^2}} \right) + m\pi \right] & \text{（TM モード）} \end{cases} \tag{2.54}$$

となる。**規格化周波数 (Normalized Frequency)**

$$V = \frac{\pi t}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{2.55}$$

と**規格化伝搬定数 (Normalized Propagation Constant)**

$$B = \frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \tag{2.56}$$

を用いると，この固有値方程式は

$$2V\sqrt{1 - B} = \begin{cases} \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{B}{1-B}} + \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{B+\gamma}{1-B}} + m\pi & \text{（TE モード）} \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{n_1^2}{n_2^2}\sqrt{\dfrac{B}{1-B}} \right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{n_1^2}{n_3^2}\sqrt{\dfrac{B+\gamma}{1-B}} \right) + m\pi & \text{（TM モード）} \end{cases} \tag{2.57}$$

と書ける。ここで，$\gamma = (n_2^2 - n_3^2)/(n_1^2 - n_2^2)$ は導波路の非対称度である。これから得られるモード分散曲線を**図 11**に示す。

2.2 チャネル導波路

ここまでは，厚み方向にのみ光を閉じ込めるスラブ導波路について考えてきたが，実際のデバイスではこのような構造を利用することはあまり多くない。半導体レーザを含めて多くの光デバイスでは，厚み方向だけでなく幅の方向にも屈折率差を設けて光を 2 次元方向から閉じ込める**チャネル導波路 (channel waveguide)** 構造が用いられる。**図12**に代表的なチャネル導波路の構造を示す。チャネル導波路では，もはや，TE モード TM モードは存在せず，導波モードは**ハイブリッドモード (hybrid mode)** となる。

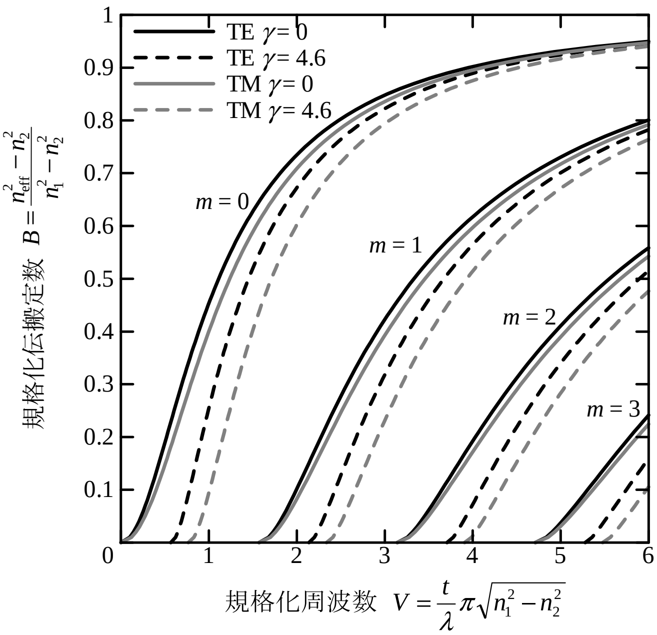

図 11　スラブ導波路の規格化モード分散曲線（対称導波路では $n_1 = 3.5$, $n_2 = n_3 = 3.2$ ($\gamma = 0$), 非対称導波路では $n_1 = 3.5$, $n_2 = 3.2$, $n_3 = 1.0$ ($\gamma = 4.6$) として計算した）

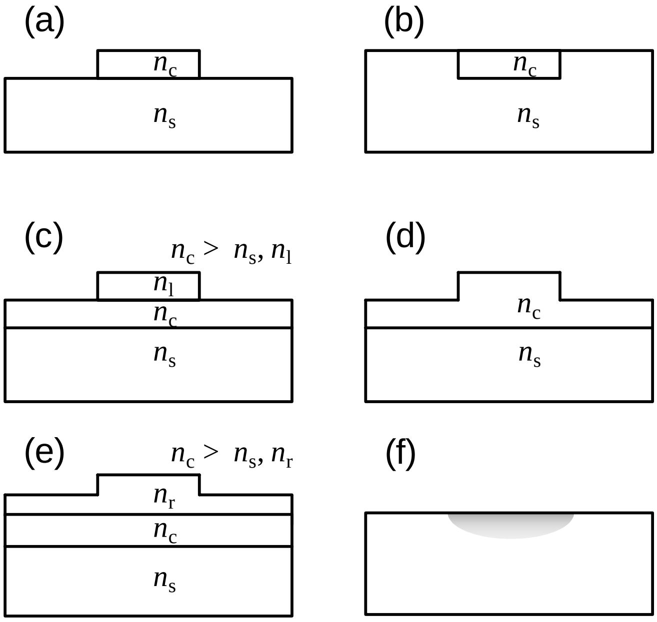

図 12　代表的なチャネル導波路の構造。(a) ストリップ導波路，(b) 埋め込み導波路，(c) ストリップ装荷導波路，(d) リブ導波路，(e) リッジ導波路，(f) 拡散導波路。

チャネル導波路の固有モードは，解析的に厳密解を求めることができない。チャネル導波路の導波モードを解析的に近似計算する方法として，マーカティリ (Marcatili) の方法や**等価屈折率法 (effective index method)** などの手法があるが，いずれもカットオフ付近での解析に向かない，拡散導波路のような構造への対応が困難である（後者はさらに，幅，厚み方向の閉じ込めの差が大きい場合にしか適用できない）など，制限が多い。

チャネル導波路に関する汎用性の高い導波モード解析法として，級数展開に基づく点整合法，モー

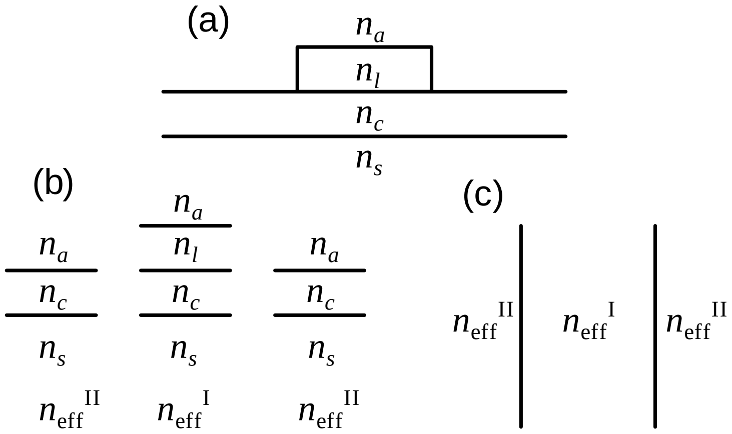

図 13　ストリップ装荷型導波路 (a) での等価屈折率法による解析手順。まず最初に３つのスラブ導波路 (b) に分けて考え，次にそこで得られた等価屈折率を使ってそれに直交するスラブ導波路 (c) とみなして解析する。

ド整合法，波動整合法 (WMM) などが提案されている。また，さらに汎用性が高く高精度の解析手法として，有限要素法 (FEM) や有限差分法 (FDM) などの数値計算手法が多用される。これらの手法は，任意の屈折率分布をもつ導波路の解析が可能である，異方性も取り込めるなど，きわめて有用である。

しかしながら，比較的単純な構造のチャネル導波路ならば，等価屈折率法による等価屈折率の見積もりは悪くない結果を与えてくれることが多い。また，等価屈折率法の考え方は導波路の設計の段階で有効なことが多いので，簡単にここで紹介しておく。

等価屈折率法の考え方はきわめて簡単である。**図13**のように，まずある１次元方向（例えば厚み方向，これを x としよう）のスラブ導波路の問題として各 y で実効屈折率を求め，これから求められた $n_{\mathrm{eff}}(y)$ で構成されるスラブ導波路（y 方向に光が閉じ込められる）の固有値方程式を解く，というものである。固有モードの電場分布は，それぞれの１次元問題から得られた界分布の積とすればよい。

上述の解析法は，いずれも，光の伝搬方向に一様な断面構造を有する導波路を対象としたものである。アレイ導波路回折格子や方向性結合器など，多くの光機能素子では曲がりやテーパが設けられており，そうした素子中を伝搬する光の挙動を調べるにはまったく別な手法が必要となる。ビーム伝搬法 (BPM) はそのような目的で開発されたきわめて強力な解析手法である。また，最近では，計算機能力の大幅な向上により，有限差分時間領域 (FDTD) 法も光導波路素子の動作解析に用いることが現実的になりつつある。

2.3　円形導波路（光ファイバー）

光ファイバーは，いずれも石英ガラスでできた円形断面のコアの周りをやはり円形断面のクラッドで覆ったものである。コア内の屈折率が均一なものを**スッテプインデクスファイバー (step-index fiber, SI fiber)**，コアの外周から中心に向かって徐々に屈折率が変化するように作製したものを**グレイデッドインデクスファイバ (graded-index fiber, GI fiber)** という。通常の光ファイバのクラッド直径は 125 μm に統一されている。コア直径が数 μm のスッテプインデクスファイバはシングルモードファイバとなり，長距離・大容量光通信に用いられる。コア直径を 50 μm に広げ，ファイバ間や他の光デバイスとの接続を容易にしたものもある。これはマルチモードファイバになるので，モード

分散の影響が深刻になるが，モード分散を極力抑えるために屈折率になだらかな分布を持たせた GI ファイバが多用されている。さらに，ファイバに非対称構造を持たせて意図的に異方性を導入することによって偏光を保存するようにした偏波保持ファイバは，計測用途などに利用されている。

2.3.1 ステップインデクスファイバ

ここでは，ステップインデクスファイバの導波モードについて調べよう。コアの半径を a とし，コアとクラッドの屈折率をそれぞれ n_1, n_2 としよう。すなわち，

$$\epsilon_r(r) = n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 & (r \le a) \\ n_2^2 = n_1^2(1-2\Delta) & (r > a) \end{cases} \tag{2.58}$$

とする。ここで，Δ は式 (2.36) で定義された比屈折率差である。電場と磁場に対して $\exp[\mathrm{i}(\beta z - \omega t)]$ の依存性を仮定して，円筒座標系 (r, ϕ, z) で Maxwell 方程式 (2.1a), (2.1b) を書き下すと，

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \mathrm{i}\beta E_\phi = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_r \tag{2.59a}$$

$$-\mathrm{i}\beta E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_\phi \tag{2.59b}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rE_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \phi} = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_z \tag{2.59c}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \mathrm{i}\beta H_\phi = \mathrm{i}\omega n^2\epsilon_0 E_r \tag{2.59d}$$

$$-\mathrm{i}\beta H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \mathrm{i}\omega n^2\epsilon_0 E_\phi \tag{2.59e}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} = \mathrm{i}\omega n^2\epsilon_0 E_z \tag{2.59f}$$

となる。これから，E_r, E_ϕ, H_r, H_ϕ を E_z, H_z で表すと，

$$E_r = -\frac{\mathrm{i}}{n^2k_0^2 - \beta^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial r} + \omega\mu_0\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}\right) \tag{2.60a}$$

$$E_\phi = -\frac{\mathrm{i}}{n^2k_0^2 - \beta^2}\left(\beta\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial r}\right) \tag{2.60b}$$

$$H_r = -\frac{\mathrm{i}}{n^2k_0^2 - \beta^2}\left(\beta\frac{\partial H_z}{\partial r} - \omega n^2\epsilon_0\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi}\right) \tag{2.60c}$$

$$H_\phi = -\frac{\mathrm{i}}{n^2k_0^2 - \beta^2}\left(\beta\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \omega n^2\epsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) \tag{2.60d}$$

となることがわかる。式 (2.60c), (2.60d) を式 (2.59f) に代入すると，

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + (n^2k_0^2 - \beta^2)E_z = 0 \tag{2.61}$$

が得られる。同様に，式 (2.60a), (2.60b) を式 (2.59c) に代入すると，

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + (n^2k_0^2 - \beta^2)H_z = 0 \tag{2.62}$$

が得られる。式 (2.61), (2.62) から E_z, H_z が求まればそれらを式 (2.60a)–(2.60d) に代入して E_r, E_ϕ, H_r, H_ϕ が求まることになる。電場に対する波動方程式 (2.61)（磁場に対する式 (2.62) もまったく同

じだが）の解は次のように変数分離して求めることができる。

$$E_z(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi) \tag{2.63}$$

これを式 (2.61) に代入すると，

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} + l^2\Phi = 0 \tag{2.64a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \left(n^2k_0^2 - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2}\right)R = 0 \tag{2.64b}$$

となる。ここで，l は変数分離パラメータであるが，式 (2.64a) の解

$$\Phi(\phi) = \exp(\mathrm{i}l\phi) \tag{2.65}$$

が ϕ の一価関数であるためには，l は整数でなければならない。したがって，我々が解かなければならないのは，r に関するベッセルの微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \left(q^2 - \frac{l^2}{r^2}\right)R = 0 \qquad (r \le a) \tag{2.66a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \left(p^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)R = 0 \qquad (r > a) \tag{2.66b}$$

である。ここで，$q^2 = n_1^2k_0^2 - \beta^2, p^2 = \beta^2 - n_2^2k_0^2$ である。式 (2.66a), (2.66b) の一般解は，それぞれ

$$R(r) = AJ_l(qr) + A'N_l(qr) \qquad (r \le a) \tag{2.67a}$$

$$R(r) = C'I_l(pr) + CK_l(pr) \qquad (r > a) \tag{2.67b}$$

で与えられる。ここで，A, A', C, C' は任意の定数，J_l は l 次の第一種ベッセル関数，N_l は l 次の第二種ベッセル関数，I_l は l 次の第一種変形ベッセル関数，K_l は l 次の第二種変形ベッセル関数である。*8 コア内 $(r \le a)$ で電場は有界でなければならないが，N_l は $x \to 0$ で発散するので，$A' = 0$ である。また，$r \to \infty$ で I_l は発散してしまうので，$C' = 0$ でなければならない。結局，

$$E_z(r,\phi) = \begin{cases} AJ_l(qr)\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r \le a) \\ CK_l(pr)\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r > a) \end{cases} \tag{2.68a}$$

$$H_z(r,\phi) = \begin{cases} BJ_l(qr)\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r \le a) \\ DK_l(pr)\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r > a) \end{cases} \tag{2.68b}$$

*8 重要な漸化式を以下にあげる。

$$J_l(x) \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{l!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^l & (x \ll 1) \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \dfrac{l\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) & (x \gg 1, l) \end{cases}$$

$$K_l(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{e}^{-x} \qquad (x \gg 1, l)$$

とおける。これを式 (2.60a)–(2.60d) に代入して，

$$E_r = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{i}}{q^2}\left[Aq\beta J_l'(qr) + \dfrac{\mathrm{i}\omega\mu_0 l}{r}BJ_l(qr)\right]\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r \leq a) \\ \dfrac{\mathrm{i}}{p^2}\left[Cp\beta K_l'(pr) + \dfrac{\mathrm{i}\omega\mu_0 l}{r}DK_l(pr)\right]\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r < a) \end{cases} \tag{2.69a}$$

$$E_\phi = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{i}}{q^2}\left[\dfrac{\mathrm{i}l}{r}A\beta J_l(qr) - \omega\mu_0 BqJ_l'(qr)\right]\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r \leq a) \\ \dfrac{\mathrm{i}}{q^2}\left[d\frac{\mathrm{i}l}{r}C\beta K_l(pr) - \omega\mu_0 DpK_l'(pr)\right]\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r < a) \end{cases} \tag{2.69b}$$

$$H_r = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{i}}{q^2}\left[Bq\beta J_l'(qr) - \dfrac{\mathrm{i}\omega n_1^2\epsilon_0 l}{r}AJ_l(qr)\right]\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r \leq a) \\ \dfrac{\mathrm{i}}{p^2}\left[Dp\beta K_l'(pr) - \dfrac{\mathrm{i}\omega n_2^2\epsilon_0 l}{r}CK_l(pr)\right]\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r < a) \end{cases} \tag{2.69c}$$

$$H_\phi = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{i}}{q^2}\left[\dfrac{\mathrm{i}l}{r}B\beta J_l(qr) + \omega n_1^2\epsilon_0 AqJ_l'(qr)\right]\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r \leq a) \\ \dfrac{\mathrm{i}}{q^2}\left[\dfrac{\mathrm{i}l}{r}D\beta K_l(pr) + \omega n_2^2\epsilon_0 CpK_l'(pr)\right]\exp(\mathrm{i}l\phi) & (r < a) \end{cases} \tag{2.69d}$$

が得られる。ここで，$J_l'(qr) = \frac{\mathrm{d}J_l(qr)}{\mathrm{d}(qr)}, K_l'(pr) = \frac{\mathrm{d}K_l(pr)}{\mathrm{d}(pr)}$ である。$r = a$ で E_z, E_ϕ, H_z, H_ϕ が連続であるという条件から，

$$AJ_l(qa) - CK_l(pa) = 0 \tag{2.70a}$$

$$A\left[\frac{\mathrm{i}l}{q^2a}J_l(qa)\right] + B\left[-\frac{\omega\mu_0}{q\beta}J_l'(qa)\right] + C\left[\frac{\mathrm{i}l}{p^2a}K_l(pa)\right] + D\left[-\frac{\omega\mu_0}{p\beta}K_l'(pa)\right] = 0 \tag{2.70b}$$

$$BJ_l(qa) - DK_l(pa) = 0 \tag{2.70c}$$

$$A\left[\frac{\omega n_1^2\epsilon_0}{q\beta}J_l'(qa)\right] + B\left[\frac{\mathrm{i}l}{q^2a}J_l(qa)\right] + C\left[\frac{\omega n_2^2\epsilon_0}{p\beta}K_l'(pa)\right] + D\left[\frac{\mathrm{i}l}{p^2a}K_l(pa)\right] = 0 \tag{2.70d}$$

が得られる。A, B, C, D が 0 でない解をもつためには，この係数行列式が 0 でなければならない。これから，

$$\left[\frac{J_l'(qa)}{qaJ_l(qa)} + \frac{K_l'(pa)}{paK_l(pq)}\right]\left[\frac{J_l'(qa)}{qaJ_l(qa)} + (1-2\varDelta)\frac{K_l'(pa)}{paK_l(pa)}\right] = \left(\frac{l\beta}{n_1k_0}\right)^2\left[\frac{1}{(qa)^2} + \frac{1}{(pa)^2}\right]^2 \tag{2.71}$$

という固有値方程式が得られる。これと

$$q^2 + p^2 = (n_1^2 - n_2^2)k_0^2 = 2n_1^2\varDelta k_0^2 \tag{2.72}$$

の連立方程式を解くことで q, p が，すなわち伝搬定数 β（あるいは実効屈折率 n_{eff}）を求めることができる。しかし，この固有値方程式の解法は一般に極めて煩雑である。

■厳密解　まず最初に，固有値方程式 (2.71) の厳密解が比較的簡単に求められる場合について考えよう。$l = 0$ の場合には $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ となるので，Maxwell 方程式 (2.59a)–(2.59f) は次のように簡単になる。

$$\mathrm{i}\beta E_\phi = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_r \tag{2.73a}$$

$$-\mathrm{i}\beta E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_\phi \tag{2.73b}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_z \tag{2.73c}$$

$$\mathrm{i}\beta H_\phi = \mathrm{i}\omega n^2\epsilon_0 E_r \tag{2.73d}$$

$$-\mathrm{i}\beta H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \mathrm{i}\omega n^2\epsilon_0 E_\phi \tag{2.73e}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} = \mathrm{i}\omega n^2\epsilon_0 E_z \tag{2.73f}$$

これらの式は，E_ϕ, H_r, H_z のみからなる式（(2.73a), (2.73c), (2.73e)）と H_ϕ, E_r, E_z のみからなる式（(2.73b), (2.73d), (2.73f)）とに分離できる。前者を TE モード，後者を TM モードとよぶ。TE モードの場合は，$l = 0, A = C = 0$ なので，式 (2.70b), (2.70c) より，

$$\frac{J_0'(qa)}{qaJ_0(qa)} + \frac{K_0'(pa)}{paK_0(pa)} = 0 \tag{2.74}$$

が得られる。この固有値方程式から得られる離散的固有値を $\beta_{0m}(m = 1, 2, 3, \ldots)$ とすると，それに対応する導波モードは TE_{0m} モード（$m = 1, 2, 3, \ldots$）と表される。一方，TM モードの場合は，$l = 0$, $B = D = 0$ なので，式 (2.70a), (2.70d) より，

$$\frac{J_0'(qa)}{qaJ_0(qa)} + \frac{n_2^2}{n_1^2}\frac{K_0'(pa)}{paK_0(pa)} = 0 \tag{2.75}$$

が得られる。TE モードと同様，固有値 $\beta_{0m}(m = 1, 2, 3, \ldots)$ に対応する導波モードは TM_{0m} モード（$m = 1, 2, 3, \ldots$）と表現される。$l \geq 1$ の場合には，$l = 0$ の場合と異なり，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ の 6 成分すべてが 0 でないハイブリッドモードが出現する。ハイブリッドモードについては固有値方程式 (2.71) をまともに解かなければならない。式 (2.71) を $J_l'(qa)/qaJ_l(qa)$ について解くと

$$\frac{J_l'(qa)}{qaJ_l(qa)} = -(1-\Delta)\frac{K_l'(pa)}{paK_l(pa)} \pm \sqrt{\Delta^2\left(\frac{K_l'(pa)}{paK_l(pa)}\right)^2 + \left(\frac{l\beta}{n_1k_0}\right)^2\left(\frac{1}{q^2a^2} + \frac{1}{p^2a^2}\right)^2} \tag{2.76}$$

が得られる。ベッセル関数に関する関係式

$$J_l'(x) = -J_{l+1}(x) + \frac{l}{x}J_l(x) = J_{l-1}(x) - \frac{l}{x}J_l(x) \tag{2.77}$$

を用いると，式 (2.76) は次の 2 種類の固有値方程式に変形できる。

$$\frac{J_{l\pm1}(qa)}{qaJ_l(qa)} = \pm(1-\Delta)\frac{K_l'(pa)}{paK_l(pa)} + \left[\frac{l}{p^2a^2} - \sqrt{\Delta^2\left(\frac{K_l'(pa)}{paK_l(pa)}\right)^2 + \left(\frac{l\beta}{n_1k_0}\right)^2\left(\frac{1}{q^2a^2} + \frac{1}{p^2a^2}\right)^2}\right] \tag{2.78}$$

この固有値方程式中の 2 つの ± が + の場合に対応するモードを EH モード，− に対応するモードを HE モードとよぶ。与えられた l に対する m 番目 $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ の固有値に対応する導波モードは EH_{lm} モード（$m = 1, 2, 3, \ldots$），あるいは HE_{lm} モード（$m = 1, 2, 3, \ldots$）とよばれる。最低次

モードは HE_{11} であり，そのカットオフは 0 である。また，次の低次モードは TE_{01} で，そのカットオフは規格化周波数で表すと，$V = 2.405$ である。[*9]すなわち，ステップインデクスファイバは $\frac{2\pi a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2.405$ でシングルモードとなる。**シングルモードファイバ (single-mode fiber)** は光通信できわめて重要な役割を果たす。

■弱導波近似　固有値方程式 (2.71) は弱導波近似 ($\Delta \ll 1$) のもとで著しく簡単化でき，見通しがよくなる。この場合は，TE モードと TM モードが（近似的に）縮退し，その固有値方程式 (2.74) は $J_0' = -J_1, K_0' = -K_1$ の関係を用いて書き直すと，

$$\frac{J_1(qa)}{qaJ_0(qa)} = -\frac{K_1(pa)}{paK_0(pa)} \qquad (\mathrm{TE}_{0m}, \mathrm{TM}_{0m}) \tag{2.79}$$

となる。また，ハイブリッドモードの固有値方程式も単純化できる。式 (2.71) は $\Delta \to 0$ の極限では

$$\frac{J_l'(qa)}{qaJ_l(qa)} + \frac{K_l'(pa)}{paK_l(pq)} = \pm l\frac{1}{(qa)^2} + \frac{1}{(pa)^2} \tag{2.80}$$

と書ける（$\beta \to n_1k_0$ となることに注意）。$\pm$ が $+$ に対応するのが EH モード，$-$ に対応するのが HE モードである。ベッセル関数の関係式

$$\frac{J_l'(x)}{xJ_l(x)} = \frac{J_{l-1}(x)}{xJ_l(x)} - \frac{l}{x^2} = -\frac{J_{l+1}(x)}{xJ_l(x)} + \frac{l}{x^2} \tag{2.81a}$$

$$\frac{K_l'(x)}{xK_l(x)} = -\frac{K_{l-1}(x)}{xK_l(x)} - \frac{l}{x^2} = -\frac{K_{l+1}(x)}{xK_l(x)} + \frac{l}{x^2} \tag{2.81b}$$

を用いると，EH モードの対する固有値方程式は

$$\frac{J_{l+1}(qa)}{qaJ_l(qa)} = -\frac{K_{l+1}(pa)}{paK_l(pa)} \qquad (\mathrm{EH}_{lm}) \tag{2.82}$$

となる。同様に，HE モードに対する固有値方程式は

$$\frac{J_{l-1}(qa)}{qaJ_l(qa)} = \frac{K_{l-1}(pa)}{paK_l(pa)} \tag{2.83}$$

となるが，これにベッセル関数の漸化式

$$\frac{(l-1)J_{l-1}(x)}{x} = \frac{1}{2}\left[J_l(x) + J_{l-2}(x)\right] \tag{2.84a}$$

$$\frac{(l-1)K_{l-1}(x)}{x} = \frac{1}{2}\left[K_l(x) - K_{l-2}(x)\right] \tag{2.84b}$$

を適用すると，

$$\frac{J_{l-1}(qa)}{qaJ_{l-2}(qa)} = -\frac{K_{l-1}(pa)}{paK_{l-2}(pa)} \qquad (\mathrm{HE}_{lm}) \tag{2.85}$$

が得られる。HE モードに対する固有値方程式 (2.85) と EH モードに対する固有値方程式 (2.82) を見比べると，HE_{lm} モードと $\mathrm{EH}_{l-2,m}$ モードが縮退していることがわかる。また，HE モードに対する固有値方程式 (2.85) と TE モード・TM モードに対する固有値方程式 (2.79) を比較すると，TE_{0m},

[*9] 2.405 というのは，$J_0(x) = 0$ を与える最小の x の値である。

TM_{0m}, HE_{2m} の 3 つのモードも縮退していることがわかる。そこで，l に代わる新しいパラメータとして

$$p = \begin{cases} 1 & \text{(TE, TM)} \\ l+1 & \text{(EH)} \\ l-1 & \text{(HE)} \end{cases} \tag{2.86}$$

を導入すると，すべてのモードの固有値方程式が

$$\frac{J_p(qa)}{qaJ_{p-1}(qa)} = -\frac{K_p(pa)}{paK_{p-1}(pa)} \qquad (\mathrm{LP}_{pm}) \tag{2.87}$$

の形に統一できる。この新しいパラメータ p で整理されるモードを **LP モード**(linearly polarized mode) とよぶ。最低次モードであった HE_{11} は LP_{01} モードとなる。各 LP モードの電磁界分布を見てみると，同じ LP モードに属するモードの一方向の電場成分（E_x あるいは E_y）の強度分布は同じパターンになっている。また，LP モードのパラメータ p は周回方向に回転して観察したときの E_x（あるいは E_y）の変化に対応している。

2.4 導波路からの光出射と導波路への光結合

まず最初にシングルモード導波路からの光の出射について考えよう。この問題は基本的には，ある決まった開口からの回折現象として捉えることができる。ただし，その開口は導波路の構造によって決まるのではなく，導波モードの電場分布によって決まることに注意が必要である。スラブ導波路や光ファイバの基本モード（最低次モード）のモード分布関数は，ガウシアンによく似ている。そこで，シングルモード導波路から出射する光の伝搬はガウシアンビームの広がりと同じとみなしてよい。すなわち，式 (1.35) で与えられる角度で広がるのである。導波モードの強度分布の半径を w_0，広がり角を 2θ とすると，

$$2\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{\pi w_0 n}\right) \simeq \frac{4}{\pi}\frac{\lambda}{2w_0} \tag{2.88}$$

の関係が成り立つ。シングルモード導波路への光結合は，上の光出射とまったく逆の過程であるから，導波路の入射端面上に導波モードの電場分布と同じ分布になるように上式の収束角で集光してやればよい。つまり，適切なサイズの平行ビームを適切な NA のレンズを用いて導波路の入射端面上にフォーカスすればよい。入射端面上での入射光の電場分布を $\psi_\mathrm{i}(x,y)$，導波モードの電場分布を $\psi_\mathrm{w}(x,y)$ とすると，この導波モードへのパワー結合効率は

$$\eta = \frac{\left|\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \psi_\mathrm{i}^*(x,y)\psi_\mathrm{w}(x,y)\right|^2}{\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \left|\psi_\mathrm{i}(x,y)\right|^2 \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \left|\psi_\mathrm{w}(x,y)\right|^2} \tag{2.89}$$

で与えられる。入射光と導波モードの電場分布がともにガウシアンであり，スポットサイズがそれぞれ $w_\mathrm{i}, w_\mathrm{w}$ であるとすると，軸ずれがない場合のパワー結合効率は

$$\eta = \frac{4}{\left(\frac{w_\mathrm{i}}{w_\mathrm{w}} + \frac{w_\mathrm{w}}{w_\mathrm{i}}\right)^2} \tag{2.90}$$

となる。すなわち，$w_\mathrm{i} = w_\mathrm{w}$ のときのみ $\eta = 1$，すなわち 100 % の結合効率が得られる[*10]。

[*10] 実際には，入射端におけるフレネル反射による損失 $R = \left(\frac{n-n_\mathrm{w}}{n+n_\mathrm{w}}\right)^2$（$n$ は入射光側の自由空間の屈折率，n_w は導波モードの等価屈折率）が残る。

マルチモード導波路中の伝搬光の界分布は導波モードの重ねあわせとなっている。それぞれの導波モードは異なる電場分布を持つために異なった回折のしかたをする。したがって，マルチモード導波路から放射される光は極めて複雑な振る舞いをすることになる。マルチモード導波路の出射光はシングルモード導波路の場合と異なり，厳密にコリメートしたり回折限界にフォーカスしたりすることができない。マルチモード導波路に光を入射して結合させるためには，ある決まった入射角 $\theta_{\max}$ 以下で集光しなければならない。$\theta = \theta_{\max}$ の角度で入射した光がコア・クラッド界面で臨界角で全反射するという条件から，

$$\theta_{\max} = \sin^{-1}\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right) = \sin^{-1}\left(\sqrt{2n_1^2 \Delta}\right) \tag{2.91}$$

となる（n_1, n_2 はそれぞれコアとクラッドの屈折率）。これを導波路の集光角という。また，導波路の開口数 (NA) は

$$\mathrm{NA} \equiv \sin\theta_{\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{2\Delta}\, n_1 \tag{2.92}$$

で与えられる。

3　光ファイバ

現代の高度情報社会を支える最も重要な基盤技術である光ファイバ通信では，シリカ SiO_2 ガラスを主成分とした光ファイバ中を半導体レーザ光を伝搬させることで超高速通信をおこなっている。シリカ系光ファイバを用いる利点としては，伝送損失が低い（0.2 dB/km 以下），伝送帯域が広い（25 THz 以上），電磁誘導の影響を受けない，ケーブルが軽くて細い，端末機器の接地が独立に取れる，などがある。

シリカ系光ファイバの伝搬損失の要因は以下の 3 つの要素が主要なものである。長波長側は波長 9 μm にピークを持つ SiO_2 の分子振動のすそが $C\exp(-\hbar\omega/E_0)$ という形で現れ，短波長側は SiO_2 のバンド間遷移吸収のすそ（これも $C'\exp(\hbar\omega/E_0')$ という形で寄与する）と，ガラス固化時に残る波長より十分短い領域での屈折率変動による**レイリー散乱 (Rayleigh scattering)** が損失の下限を決める。レイリー散乱損失は

$$\alpha(\lambda) = \frac{8\pi^3}{3\lambda^4} n^8 p^2 \beta_T k_B T_g \tag{3.1}$$

で与えられる。ここで，p は光弾性定数，β_T は等温圧縮率，T_g はガラス固化温度である。これらはいずれも光ファイバに用いる材料固有の損失で，これらの総計が光ファイバの伝搬損失の下限を決定することになる。これ以外に，混在した不純物による吸収が問題となる。最後まで残った不純物は H_2O で，OH 基の振動（波長 2.73 μm）の倍音が 1.37 μm に，SiO 結合の基本振動と OH 基の基本振動の結合振動が 1.23 μm に現れる。現在では，気相軸付け (vapor-phase axial deposition, VAD) 法とよばれる方法で，この不純物のほとんど含まれないファイバが実現され，理論値に近い低損失ファイバが実用化されている。

大容量通信用光ファイバのもう一つの重要な特性は分散特性である。シングルモードファイバではモード分散はないが，コア・クラッドの材料の屈折率の波長分散に起因する**材料分散 (material dispersion)** と導波モードの伝搬定数が V 依存性を有することから生じる**導波路分散 (waveguide dispersion)**（**構造分散**ともよばれる）とがパルス光の広がりをもたらす。材料分散の影響は，既に 1.3.2で見たように

$$D_m = -\frac{\lambda}{c}\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\lambda^2} \tag{3.2}$$

で与えられる。導波路分散の影響は，同様に

$$D_w = -\frac{\lambda}{c}\frac{\mathrm{d}^2 n_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}\lambda^2} \tag{3.3}$$

と表せ，結局，全群速度分散は

$$D = D_m + D_w = -\frac{\lambda}{c}\left(\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{\mathrm{d}^2 n_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) \tag{3.4}$$

となる。SiO_2 の D_m は 1.27 μm 付近で 0 となり，長波長側で正，短波長側で負の値をとる。これに対して，D_w はコア・クラッドの屈折率 n_1, n_2 だけでなくコア径 $2a$ にも依存するが，通常の低損失シングルモードファイバでは，1.3 μm でゼロ分散となり，通信波長帯で負の値をとる。これに対して，コア直径を約 4 μm とし，屈折率プロファイルを適切にデザインすることで導波路分散を大きくし，ゼロ分散波長を 1.55 μm にシフトさせた分散シフトファイバ (dispersion-shifted fiber, DSF) や，群速度分散の波長依存性を小さくした分散平坦化ファイバなどの分散制御ファイバ (dispersion-managed fiber) が開発されている。

4　半導体レーザ

半導体レーザは光ディスクやレーザプリンタ，光ファイバ通信，光計測など，現代の光情報処理技術における最大のキーデバイスである。1962 年に初めて発振が確認され（最初のレーザ発振のわずか 2 年後！）て以来，1970 年の室温連続発振の実現を経て，激烈な開発競争が今日でも続いている。この分野で特筆すべきことは，日本の研究者，技術者たちが極めて重要な貢献をしてきていることである。この節では，まずレーザの基本をまとめた上で，半導体レーザの基本的な原理・特性をまとめ，その材料である化合物半導体の特徴とそれがどのようにデバイスで活用されているかをのべる。

4.1　レーザの基礎

レーザ (laser: light amplificaion by stimulated emmission of radiation) の基本的構成は互いに平行な 2 枚の反射鏡の間に**反転分布 (population inversion)** を持つレーザ媒質を入れたものである。2 枚の反射鏡は**ファブリ・ペロー共振器 (Fabry-Perot cavity)** を構成し，光を閉じ込める役割を果たす。レーザ媒質は，反転分布による誘導放出によって光を増幅する。

4.1.1　レーザ光の特徴

レーザ光には以下のような特徴がある。

1) **コヒーレンシー**
レーザ光は波の位相のよくそろった光波である。位相がそろっていることを一般的に**コヒーレント (coherent)** であるという。また，コヒーレントである度合を**コヒーレンス (coherence)** あるいは**コヒーレンシー (coherency)** という。レーザ光は空間的にコヒーレントであるために極めて干渉性がよい。[*11] また，時間的コヒーレンスがよく，ほとんど単色である。

2) **指向性・集光性**
レーザ光はコヒーレントであるために，レーザビームは極めて指向性がよい。また，その結果

[*11] コヒーレンスに対応する日本語としては**可干渉性**が用いられる。

として，レンズなどで集光した時のスポット径を極めて小さくでき，集光性に優れている。最適化した条件下では，レーザ光は回折限界まで集光できる。

3) **高エネルギー密度・高輝度**

連続発振（continuous wave の頭文字をとって **cw 発振**ともよばれる）レーザの出力はそれほど大きくはない。半導体レーザでは 100 mW 程度，大型の Ar レーザや YAG レーザでも 100 W 程度である。しかし，集光性がよいために，微小スポットに集光した時の焦点でのパワー密度（強度）は極めて高くなる。また，単色性がよいために狭いスペクトル範囲にエネルギーが集中しており，**輝度 (brightness)** が非常に高い。

4) **超短光パルス**

この講義では扱う余裕がないが，レーザは超短光パルスの発生が可能で，最短で 4 fs 程度のパルス幅まで得られている。パルス発振レーザの**尖頭出力 (peak power)** は cw レーザよりもはるかに高く，1 TW 以上のピークパワーが得られる。このような大出力パルスレーザ光を集光すれば時間的・空間的にエネルギー密度の極めて高い状態を作り出せる。

4.1.2　いろいろなレーザ

■励起方式による分類

- 放電励起
  気体レーザの最も一般的な励起方式
- 電子ビーム励起
  エキシマレーザ，大出力 CO_2 レーザに用いられる
- 光励起
  固体レーザ，液体レーザに用いられる
  - ランプ励起
  - レーザ光励起
  - 半導体レーザ (LD) 励起
- 化学反応励起
  HF レーザ，ヨウ素レーザ
- 電流励起
  半導体レーザでのみ用いられる

■レーザ媒質による分類

- 気体レーザ
  気体の分子・原子・イオンをレーザー媒質として用いるレーザ
  cf. CO_2 レーザ, He-Ne レーザ, Ar イオンレーザ, 各種エキシマレーザ
  例 1) He-Ne レーザ (3.39, 1.52, 1.15, <u>0.6328</u>, 0.604, 0.612, 0.594 0.543 μm)
  例 2) Ar イオンレーザ (0.275~1.09 μm, 特に 0.515, 0.488 μm)
- 液体レーザ
  色素レーザが代表例
- 固体レーザ

ガラスや結晶などの透明の固体に Nd などの希土類や Cr などの遷移元素をイオン状態でドープしたものを用いる。
cf. Nd:ガラスレーザ, Nd:YAG レーザ, Nd:YLF レーザ, ルビーレーザ, Ti:サファイアレーザ
例) Nd:YAG レーザ (1.064 μm)

- 半導体レーザ (Laser Diode: LD)
  p 型と n 型の接合半導体に外部より電流を順方向に流し，活性層領域で電子と正孔とが再結合するときに発光する現象を用いるレーザ。

4.1.3 レーザの原理

■光の吸収と放出　エネルギー E_L と E_U を持つ 2 準位間で遷移について考えよう。光を吸収して L から U へ遷移する確率はフェルミの Golden rule より

$$W_{UL} = \frac{\pi}{6\hbar^2}|\boldsymbol{\mu}_{UL}|^2 E_x^2\,\delta(\omega_{UL}-\omega) = \frac{\pi|\boldsymbol{\mu}_{UL}|^2}{3\epsilon_0\hbar^2}u_\omega\,\delta(\omega_{UL}-\omega) \equiv B_{UL}u_{\omega_{UL}} \tag{4.1}$$

と与えられる。常識的に予想される通り, 吸収に伴う遷移確率は, 角振動数 $\omega = (E_U - E_L)/\hbar$ における単位体積あたりの光のエネルギー密度 $u_\omega = \epsilon_0|E_x|^2/2$ に比例している。この式に現れた $B_{UL} = \frac{\pi|\boldsymbol{\mu}_{UL}|^2}{3\epsilon_0\hbar^2}$ は**アインシュタインの B 係数**とよばれる。一方，準位 U から L への遷移して光を放出する確率にも入射光のエネルギー密度 u_ω に比例する部分がある。しかし，それだけでなく，光がまったく存在しない場合にも励起された状態から光子を放出してエネルギーの低い状態に遷移することがあるという経験に照らしてみると，光強度に依存しない遷移過程もあるとしなければならない。前者を**誘導放出 (stimulated emission)**，後者を**自然放出 (spontaneous emission)** という。2 準位間の遷移の起こる確率は

$$p(L \to U) = B_{UL}u_\omega \tag{4.2a}$$
$$p(U \to L) = B_{LU}u_\omega + A_{LU} \tag{4.2b}$$

で与えられる（自然放出に相当する項を表す A_{nm} を**アインシュタインの A 係数**という)。B 係数との間には

$$B_{UL} = B_{LU} = B \tag{4.3a}$$
$$\frac{A_{LU}}{B_{LU}} = \frac{\hbar\omega_{UL}^3}{\pi^2 c^3} \tag{4.3b}$$

という関係が成り立つ。

今，強い入射光に対する吸収・放出を考えると，自然放出に対応する A は無視することができる。また，レーザ光のようにほぼ単色の光を考えると，媒質の吸収スペクトル線の広がりを考慮しなければならない。そこで，光の角振動数 ω での誘導遷移係数の分布を

$$B(\omega) = B\,g(\omega) \tag{4.4}$$

で表すことにする。当然，$\int_0^\infty B(\omega)\,\mathrm{d}\omega = B$，すなわち，$\int_0^\infty g(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 1$ である。上下の準位にそれぞれ単位体積あたり N_U 個，N_L 個あるとすると，単位時間あたりに吸収される光のパワーは

$$\Delta P = (N_L - N_U)\hbar\omega B(\omega)\frac{P}{c} \tag{4.5}$$

で表される。したがって，吸収係数は

$$\alpha(\omega) = (N_L - N_U)\frac{\hbar\omega}{c}B(\omega) = (N_L - N_U)\frac{\pi\omega}{3\epsilon_0\hbar c}|\mu_{UL}|^2 g(\omega) \tag{4.6}$$

となる。

■反転分布　熱平衡状態では

$$N_U = N_L \exp\left(-\frac{E_U - E_L}{kT}\right) = N_L \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \tag{4.7}$$

が成立するので，一般に

$$N_L - N_U = \left(1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega/kT}\right)N_L \tag{4.8}$$

となり，吸収係数は正の値となる。もし適当な方法で $N_L < N_U$ とすることができれば，吸収係数は負となり，光は媒質中で

$$P(z) = P(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha z} = P(0)\,\mathrm{e}^{Gz} \tag{4.9}$$

のように正味の誘導放出によって増幅されることになる。ここで，$G = -\alpha\ (> 0)$ は**利得係数 (gain constant)**，e^{Gz} は長さ z の媒質の**利得 (gain)** とよばれる。これがレーザ増幅である。

$N_L < N_U$ の状態を**反転分布 (population inversion)** 状態という。$N_L < N_U$ に対して形式的に式 (4.7) を適用すると，反転分布は $T < 0$ という負の温度状態に対応する。そこで，反転分布は**負温度 (negative temperature)** 状態ともよばれる[*12]。反転分布を作るためには，何らかの方法でエネルギーを与えて媒質を励起しなければならない。これは，媒質を下の準位から上の準位へ汲み上げることに相当するので，**ポンピング (pumping)** とよばれる。

■3 準位レーザの反転分布　媒質の持つ 3 つの準位を利用してポンピングをおこなうレーザを **3 準位レーザ (three-level laser)** という。**図14**に示すように，レーザ作用する 3 つの準位 1, 2, 3 のエネルギーを E_1, E_2, E_3，分布数を N_1, N_2, N_3 とする。ポンピングによって準位 1 から準位 3 へ単位時間に励起されるレートを Γ とする。また，励起状態から低エネルギー状態への自発的な遷移（**緩和 (relaxation, decay)**[*13]という）のレートを γ で表す。

この 3 準位系をポンピングしたときの各準位の占有数の時間変化をあらわす**レート方程式 (rate equation)** は

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\Gamma N_1 + \gamma_{21}N_2 + \gamma_{31}N_3 \tag{4.10a}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\gamma_{21}N_2 + \gamma_{32}N_3 \tag{4.10b}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = \Gamma N_1 - (\gamma_{31} + \gamma_{32})N_3 \tag{4.10c}$$

となる。ここで，$N_1 + N_2 + N_3 = N = \mathrm{const.}$ である。定常状態（上式の左辺が 0）での解（定常解）は

$$N_1 = \frac{\gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32})}{\gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32}) + (\gamma_{21} + \gamma_{32})\Gamma}N \tag{4.11a}$$

$$N_2 = \frac{\gamma_{32}\Gamma}{\gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32}) + (\gamma_{21} + \gamma_{32})\Gamma}N \tag{4.11b}$$

[*12] もちろんここでの T は熱力学的な温度ではなく，反転分布を表すパラメータに過ぎない。

[*13] これには自然放出をともなう**輻射過程 (radiative process)** だけでなく，光を放出しないで分子の運動や結晶の格子振動にエネルギーを与えて遷移する**非輻射過程 (non-radiative process)** も含まれる。

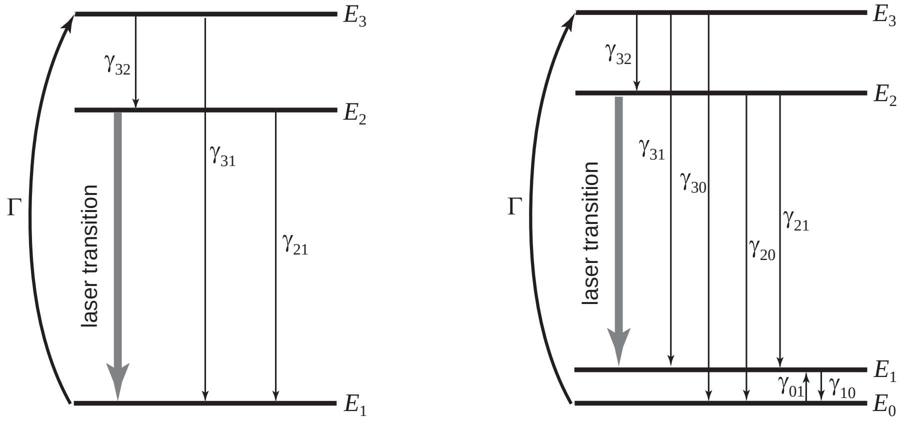

図 14　3 準位レーザのエネルギー準位（左）と 4 準位レーザのエネルギー準位（右）

となる。これより，ポンピングの強さが

$$\Gamma > \gamma_{21}\left(1 + \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{32}}\right) \tag{4.12}$$

のなれば $N_2 > N_1$ となり，反転分布が実現できることがわかる。すなわち，レーザ遷移の上準位から下準位への緩和が遅く，最初に励起される準位 3 からレーザ上準位への緩和が速ければ，より弱い励起で反転分布が実現できる。

■4 準位レーザの反転分布　3 準位レーザでは，レーザ下準位として最もエネルギーの低い準位を使っている。熱平衡状態ではこの準位が最も多く占有されているため，反転分布を実現するには強い励起が必要となる。**図14**のような **4 準位レーザ (four-level laser)** ではもっと容易に反転分布が実現できる。一般に，準位 1 は基底準位 0 に比較的近いので，多数存在する基底準位からの熱的励起 $\gamma_{01}N_0$ も考慮しなければならない。そうすると，レート方程式は

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_{01}N_0 - \gamma_{10}N_1 + \gamma_{21}N_2 + \gamma_{31}N_3 \tag{4.13a}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\gamma_2 N_2 + \gamma_{32}N_3 \tag{4.13b}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = \Gamma N_0 - \gamma_3 N_3 \tag{4.13c}$$

$$-\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} \tag{4.13d}$$

となる。ここで，$\gamma_2 = \gamma_{20} + \gamma_{21}$，$\gamma_3 = \gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32}$ とおいた。定常解は

$$N_1 = \left(\frac{\gamma_{01}}{\gamma_{10}} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_2\gamma_{31}}{\gamma_{10}\gamma_2\gamma_3}\Gamma\right)N_0 \tag{4.14a}$$

$$N_2 = \frac{\gamma_{32}\Gamma}{\gamma_2\gamma_3}N_0 \tag{4.14b}$$

$$N_3 = \frac{\Gamma}{\gamma_3}N_0 \tag{4.14c}$$

$$N_0 = \frac{\gamma_{10}\gamma_2\gamma_3 N}{(\gamma_{10} + \gamma_{01})\gamma_2\gamma_3 + \gamma_{32}(\gamma_{21} + \gamma_{10})\Gamma + \gamma_2(\gamma_{31} + \gamma_{10})\Gamma} \tag{4.14d}$$

である。反転分布の条件は

$$\Gamma > \frac{\gamma_{01}\gamma_2\gamma_3}{\gamma_{32}\gamma_{10} - \gamma_{21}\gamma_{32} - \gamma_2\gamma_{31}} \tag{4.15}$$

となる。$\gamma_{01} = \gamma_{10}\exp[-(E_1 - E_0)/kT]$[*14]は一般に小さいので，反転分布に必要な Γ は小さくできる。なお，$\gamma_{31} < \gamma_3, \gamma_{21} < \gamma_2$ なので，$\gamma_{10} \gg \gamma_2$ ならば，式 (4.15) は

$$\Gamma > \frac{\gamma_{01}\gamma_2\gamma_3}{\gamma_{10}\gamma_{32}} = \mathrm{e}^{-(E_1-E_0)/kT}(\gamma_{21}+\gamma_{20})\left(1+\frac{\gamma_{31}+\gamma_{30}}{\gamma_{32}}\right) \tag{4.16}$$

と近似できる。3 準位レーザと比べてほぼ $\mathrm{e}^{-(E_1-E_0)/kT}$ だけポンピングが弱くとも反転分布が実現できる。

■レーザ発振　一般に，増幅器に正のフィードバックをかけると増幅度が大きくなるが，ある条件で不安定になって発振状態に入る。系全体でフィードバックと増幅とがつりあったときには増幅率は無限大に発散し，0 の入力に対して有限の出力が得られるようになる。

レーザの定常的な発振を考えよう。ファブリ・ペロ共振器の二つの反射鏡のパワー反射率をそれぞれ R_1, R_2 とし，レーザ媒質の利得係数を G とする。光が共振器内を 1 往復する時の利得は

$$A^2 = \mathrm{e}^{2Gl} \tag{4.17}$$

となる。ここで，A は往復での振幅増幅率，l は共振器長（= レーザ媒質長）である。増幅出力振幅の $\beta = \sqrt{R_1R_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 倍がフィードバックされるので，位相因子 $\theta = 0$ とおくと，発振条件 $\beta A = 1$ は

$$Gl + \frac{1}{2}\ln R_1R_2 = 0 \tag{4.18}$$

となる。実際のレーザ媒質中では多少の吸収・散乱が起こる。このような反射鏡以外の部分での損失をひとまとめにして，一往復で光パワーが $K(<1)$ 倍になるとき，等価吸収係数

$$\alpha_{\mathrm{eff}} = -\frac{1}{2l}\ln K \tag{4.19}$$

を導入しよう。この損失分まで考慮すると，式 (4.18) は

$$(G - \alpha_{\mathrm{eff}})l + \frac{1}{2}\ln R_1R_2 = 0 \tag{4.20}$$

となる。この条件が満足されるとレーザ共振器は発振状態となる。これを**レーザ発振 (laser oscillation)** という。この発振条件は，共振器内での損失と利得が釣り合い，共振器中を一往復した光の振幅が減衰しないで定常的に残るための条件となっている。レーザ媒質の利得 G を次第に大きくしていくと，

$$G_{\mathrm{th}} = \frac{1}{2l}|\ln R_1R_2| + \alpha_{\mathrm{eff}} \tag{4.21}$$

に達したところでレーザ発振が始まる。この，レーザ発振開始に必要な利得係数を**しきい利得 (threshold gain)** という。さらに利得を大きくしようとすると，光パワーが強くなりレーザ遷移上準位の占有数が減少し利得が小さくなってしまうために，利得と損失が釣り合う点，すなわちしきい利得で安定した発振が継続することになる。すなわちしきい利得は定常発振時の利得でもある。

レーザ発振に必要な反転分布は，式 (4.6), (4.21) から，

$$\Delta N_{\mathrm{th}} = \frac{c}{\hbar\omega B(\omega)}\left(\frac{|\ln R_1R_2|}{2l} + \alpha_{\mathrm{eff}}\right) = \frac{3\epsilon_0 c\hbar}{\pi\omega|\mu_{21}|^2 g(\omega)}\left(\frac{|\ln R_1R_2|}{2l} + \alpha_{\mathrm{eff}}\right) \tag{4.22}$$

[*14] これは準位 1, 0 の間の局所熱平衡条件から導かれるが，熱平衡状態でなくとも一般になりたつ。

で与えられる。$g(\omega)$ がローレンツ型であるとすると，$g(\omega_0) = (\pi\Delta\omega)^{-1}$（$\Delta\omega$ はスペクトル線幅）なので，

$$\Delta N_{\mathrm{th}} = \frac{3\epsilon_0 c\hbar}{|\mu_{21}|^2}\frac{\Delta\omega}{\omega}\left(\frac{|\ln R_1R_2|}{2l} + \alpha_{\mathrm{eff}}\right) \tag{4.23}$$

となる。遷移の双極子モーメントが大きいほど，スペクトル線幅が狭いほど，共振器の損失が小さいほどしきい値が下がることがわかる。

ここまではレーザ共振器内の光の位相についてはまったく考慮してこなかった。定常発振時には，共振器中で定在波が形成されていなければならないので，

$$2kl = \frac{4\pi nl}{\lambda_0} = 2m\pi \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.24}$$

が成り立たねばならない。すなわち，発振波長は

$$\lambda_0 = \frac{2nl}{m} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.25}$$

で与えられる。この条件を満たすモードがレーザ媒質の利得スペクトル内に複数ある場合には，一般に，複数の波長（振動数）のモードが同時に発振することになる。これを**多モード (multi-mode)** 発振という。これに対して，共振器長 l が短いレーザや何らかの工夫によって特定のモードのみが発振するようにしたレーザでは，**単一モード (single-mode)** 発振が実現できる。また，このような波長・振動数の異なる発振モードのことをレーザの**縦モード (longitudinal mode)** という。

■レーザの出力特性　これまでは反転分布の条件をレート方程式を用いて調べてきたが，これはレーザ発振が始まる前の状態なので，誘導放出の効果は考慮に入っていなかった。ここでは，レーザの出力特性を調べるために，誘導放出光の影響を取り込んで考えよう。レーザ遷移は準位 2 から準位 1 へと起こるものとし，それぞれの準位の緩和定数を γ_2, γ_1 とする。また，それぞれの準位へのポンピングによる励起速度をそれぞれ，R_2, R_1 とする。解くべきレート方程式は以下のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = R_2 - \gamma_2 N_2 - (N_2 - N_1)B(\omega)u_\omega \tag{4.26a}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = R_1 - \gamma_1 N_1 + (N_2 - N_1)B(\omega)u_\omega \tag{4.26b}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_\omega}{\mathrm{d}t} = -2\kappa u_\omega + \hbar\omega(N_2 - N_1)B(\omega)u_\omega \tag{4.26c}$$

ここで，第三式は，レーザ共振器内の光のエネルギー密度の変化を記述する方程式で，右辺第一項は共振器の損失による減衰を表し，$\kappa = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2l}\sqrt{R_1R_2} + \alpha_{\mathrm{eff}}\right)$ はレーザ共振器内の光の振幅減衰率である。また，右辺第二項は誘導放出によるエネルギー増加を表している（自然放出は無視している）。発振開始時の反転分布は式 (4.26)c を 0 にする $N_2 - N_1$ であるから，

$$\Delta N_{\mathrm{th}} = \frac{2\kappa}{\hbar\omega B(\omega)} \tag{4.27}$$

である。これは，式 (4.22) と完全に同じである。定常発振時には式 (4.26)a, (4.26)b も 0 となるので，これから，

$$\Delta N = \frac{\Delta N^{(0)}(R)}{1 + 2\tau B(\omega)u_\omega} \tag{4.28}$$

が得られる。ここで，$\Delta N^{(0)}(R) = \frac{R_2}{\gamma_2} - \frac{R_1}{\gamma_1}$ はレーザ発振が起こっていない時（$u_\omega = 0$）の反転分布，$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_1}\right)$ はこの 2 準位系の実効的緩和時間である。定常発振時の光エネルギー密度 U_{ss} は式

(4.28) と (4.27) を満足する u_ω であるから，

$$U_{\mathrm{ss}} = \frac{1}{2\tau B(\omega)}\left(\frac{\Delta N^{(0)}(R)}{\Delta N_{\mathrm{th}}} - 1\right) \tag{4.29}$$

となる。レーザ媒質から誘導放出されている光パワーは単位体積あたり $P_{\mathrm{ss}} = 2\kappa U_{\mathrm{ss}}$ なので，

$$P_{\mathrm{ss}} = \frac{\hbar\omega}{2\tau}\left(\Delta N^{(0)}(R) - \Delta N_{\mathrm{th}}\right) \tag{4.30}$$

となることがわかる。ポンピングを強くしていき $\Delta N^{(0)}(R)$ が大きくなると，$\Delta N^{(0)}(R) = \Delta N_{\mathrm{th}}$ に達したところで発振が始まり，レーザ出力は $\Delta N^{(0)}(R) - \Delta N_{\mathrm{th}}$ に比例して直線的に増加する。

4.2　半導体レーザの特徴

半導体レーザ (LD: laser diode, semiconductor laser) は後述するように直接遷移型の半導体を用いたヘテロ構造ダイオードに電流注入することによってレーザ発振を実現するデバイスである。半導体レーザは，他のレーザと比較して以下のような際立った特徴がある。

1) **小型・堅牢**： レーザチップの典型的なサイズは 200 μm（幅）×100 μm（厚さ）×300 μm（キャビティ長）程度である。また，他のレーザと比較して堅牢で取扱いがはるかに容易である。
2) **高効率**： 半導体レーザの電力-光変換効率は数 %〜数十 % と極めて高い（ポピュラーな気体レーザである He-Ne レーザの効率は 0.01〜0.1% に過ぎない）。デバイスの駆動電圧が低く（1〜2 V 程度）電源を小型化できることとあいまって，使い勝手がよい。
3) **高速直接変調**： 注入電流を変調することにより光出力強度を高速（~10 GHz 以上）変調できる。光通信やレーザプリンタ，光ディスク装置などに半導体レーザの直接変調が使われている。
4) **広い波長選択範囲**： 適切な結晶を用いることによって様々な波長で動作する半導体レーザが開発されている。
5) **長寿命・高信頼性**： 技術開発の結果，半導体レーザの寿命は他のレーザと比較して格段に長くなった。最近の半導体レーザの寿命は 100 万時間を越えると推定される。
6) **量産性・低価格**： 半導体レーザは *p-n* 接合ダイオードの一種に過ぎない。他の半導体デバイスと同様，バッチ処理で生産されるので量産性に優れている。
7) **電子デバイスとの親和性**： 半導体レーザは電流駆動が可能であるのに加えて，半導体電子デバイスとの親和性が極めて高い。そこで，他の半導体電子デバイスとモノリシックに集積化することで，電子・光集積回路が実現できる可能性がある。

一方，半導体レーザの問題点としては，以下のような点があげられる。

1) **温度特性**： 半導体の温度特性を反映して，発振波長・しきい値・出力パワーなどが著しい温度依存性を示す。そのため，温度制御が必要となる場合がある。
2) **ノイズ**： 戻り光によるノイズなどが顕著である。
3) **光出力の広がり**： 活性層が波長と同程度かより小さいサイズなために，出力光が回折によって広がってしまう。そのため，外部光学系が必要となる。

しかしながら，これらの問題点はさまざまな工夫によって回避可能で，実用上致命的な欠陥ではない。

4.3　半導体レーザの構造と動作

半導体レーザは構造としては p-n 接合ダイオードである（そのため laser diode とよばれる）。最初に実現された半導体レーザは GaAs の p-n 接合ダイオードに接合面に垂直な 2 つの結晶面を反射鏡としたファブリ・ペロー型の共振器構造を採用したものであった（1962 年に 77 K でのパルス動作が確認された）。しかしながら，このような単純な構造では室温連続動作は不可能である。

4.3.1　ダブルヘテロ構造

現在の実用的な半導体レーザはすべて以下のようなダブルヘテロ構造をとっている。厚さ 0.1 μm 程度の発光層（**活性層 (active layer)** あるいは**活性領域 (active region)** という）をそれよりもバンドギャップの大きい半導体層（**クラッド層 (clad layer)** とよばれる）ではさんで p-n 接合を形成している。このデバイス構成では，異種材料を接合した**ヘテロ接合 (heterojunction)** が二つあり，**ダブルヘテロ構造 (double heterostructure)** とよばれる[*15]。

ダブルヘテロ構造では，通常の p-n 接合と同様，無バイアス時にはエネルギー障壁が存在して電流が流れないが，順方向バイアス $V \simeq E_g^{\mathrm{A}}/e$（$E_g^{\mathrm{A}}$ は活性層の材料のバンドギャップエネルギー）を印加すると電子・正孔が活性層内に進入してくる。注入された電子・正孔の密度が低いときに起こる発光は発光ダイオードと同様の自然放出光であるが，高密度の電子・正孔が注入され反転分布が実現すると誘導放出がさかんに起こり活性層は増幅媒質となる。ダブルヘテロレーザでは，活性層とクラッド層のバンドギャップ差のために電子・正孔は活性層内に閉じ込められ効率よく再結合するので，低い電流で大きな反転分布を得るのに有効である。また，通常の化合物半導体では，バンドギャップエネルギーが小さいほど屈折率が大きくなるので，活性層はクラッド層よりも屈折率が高く，光導波路のコアとして機能することになる。そのため，光も活性層に集中し，光と電子の相互作用が増強されて高効率動作が実現される。

4.3.2　半導体レーザの発振条件と光出力特性

3 次元の半導体における伝導帯と価電子帯の状態密度関数 $\rho_c(E)$, $\rho_v(E)$ は，それぞれ，

$$\rho_c(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E - E_c} \tag{4.31a}$$

$$\rho_v(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_h}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E_v - E} \tag{4.31b}$$

で与えられる。ここで，m_e, m_h は電子とホールの有効質量，E_c, E_v はそれぞれ，伝導帯の最少エネルギー，価電子帯の最大エネルギーで，バンドギャップエネルギーは $E_g = E_c - E_v$ である。熱平衡状態では，エネルギー E の状態を電子が占める確率は，一つのパラメータ F（**フェルミレベル (Fermi level)** あるいは**フェルミエネルギー (Fermi energy)**）で特徴づけられるフェルミ・ディラック分布関数

$$f(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E-F)/kT} + 1} \tag{4.32}$$

[*15] 2000 年のノーベル物理学賞は，ダブルヘテロ構造を考案した H. Kroemer とダブルヘテロレーザで室温連続発振を実現した Zh. I. Alferov に与えられた。Alferov の室温連続発振レーザは 1970 年夏に発表されたが，それとほぼ同時に同レベル以上の成果に到達していた林厳雄・M.B. Panish の業績を評価する専門家が多い。

で与えられるが，半導体レーザのように電流によって高密度のキャリアが注入されている場合にはこれは成り立たない。一般に，励起されたキャリアのバンド内緩和時間（~ 0.1 ps）はバンド間緩和（電子-ホール再結合）時間（$\sim$ ns）よりもはるかに短いので，電流注入によって励起された電子・ホールはそれぞれ伝導帯・価電子帯内で独立にフェルミ・ディラック分布すると考えてよい。そこで，電子とホールの分布 $f_c(E), f_v(E)$ は，それぞれ，

$$f_c(E_2) = \frac{1}{e^{(E_2-F_c)/kT}+1} \tag{4.33a}$$

$$f_v(E_1) = \frac{1}{e^{(E_1-F_v)/kT}+1} \tag{4.33b}$$

で与えられることになる。ここで，F_c, F_v は電子とホールの**擬フェルミレベル (quasi Fermi level)** とよばれる。光子エネルギー $\hbar\omega = E_2 - E_1$（E_2 は電子のエネルギー，E_1 はホールのエネルギー），光子密度 n_{ph} の光との相互作用による吸収，誘導放出，自然放出のレートを見てみよう。誘導放出レートは，

$$r_{21}^{\mathrm{stim}} = B_{21} n_{\mathrm{ph}}(\hbar\omega)\rho_c(E_2)\rho_v(E_1)f_c(E_2)[1-f_v(E_1)] \tag{4.34}$$

で与えられる。一方，吸収レートは

$$r_{12}^{\mathrm{abs}} = B_{12} n_{\mathrm{ph}}(\hbar\omega)\rho_c(E_2)\rho_v(E_1)f_v(E_1)[1-f_c(E_2)] \tag{4.35}$$

自然放出レートは

$$r_{21}^{\mathrm{spon}} = A_{21}\rho_c(E_2)\rho_v(E_1)f_c(E_2)[1-f_v(E_1)] \tag{4.36}$$

である。ここで，A, B はアインシュタインの A 係数，B 係数で，$A_{21} = (n^3\omega^2/\pi^2c^3)B_{21}$，$B_{21} = B_{12} = B = (\pi\omega/\epsilon_0 n^2)|\boldsymbol{\mu}_{21}|^2$ の関係が成り立つ。正味の誘導放出レートは

$$r_{21}^{\mathrm{net}} = r_{21}^{\mathrm{stim}} - r_{12}^{\mathrm{abs}} = Bn_{\mathrm{ph}}(\hbar\omega)\rho_c(E_2)\rho_v(E_1)[f_c(E_2)-f_v(E_1)] \tag{4.37}$$

であり，光増幅利得を得るためには $f_c(E_2) > f_v(E_1)$，すなわち分布反転が必要であることがわかる。式 (4.33a), (4.33b) から，この条件は

$$F_c - F_v > E_2 - E_1 = \hbar\omega \tag{4.38}$$

と書き直せる。これを Bernard-Duraffourg の条件とよぶ。

半導体では光子エネルギー $\hbar\omega$ の遷移にはさまざまなエネルギーの電子・ホールが寄与するので，これらをすべて足し合わせなければならない。したがって，

$$r^{\mathrm{net}}(\hbar\omega) = \frac{\pi\omega}{\epsilon_0 n^2} n_{\mathrm{ph}}(\hbar\omega)\int \mathrm{d}E'\,|\boldsymbol{\mu}_{21}|^2\rho_c(E')\rho_v(E'-\hbar\omega)[f_c(E')-f_v(E'-\hbar\omega)] \tag{4.39}$$

である。パワー利得係数 $g = r^{\mathrm{net}}\frac{n}{cn_{\mathrm{ph}}}$ は

$$g(\hbar\omega) = \frac{\pi\omega}{\epsilon_0 nc}\int \mathrm{d}E'\,|\boldsymbol{\mu}_{21}|^2\rho_c(E')\rho_v(E'-\hbar\omega)[f_c(E')-f_v(E'-\hbar\omega)] \tag{4.40}$$

となる。この式で与えられる利得スペクトルは，注入キャリア密度が増えるにしたがって利得係数ピーク値が増大するとともに，ピークエネルギーが高エネルギー側へシフトしていく。これは，伝導帯の電子と価電子帯のホールがバンド端から順に占有されてくるため（**バンドフィリング (band filling) 効果**）である。

次に，発振条件について考えてみよう。通常の半導体レーザでは，半導体結晶の劈開面をそのまま用いて反射鏡とし，ファブリ・ペロー共振器を構成する。ファブリ・ペローレーザの定常発振の条件は，

$$\sqrt{R_1R_2}\,\mathrm{e}^{(g-\alpha_{\mathrm{eff}})L} = 1 \tag{4.41a}$$

$$2L\frac{2\pi n}{\lambda} = 2m\pi \qquad (m = 0, 1, 2, \dots) \tag{4.41b}$$

で与えられる。ここで，L は共振器長，R_1, R_2 は両端面の反射鏡のパワー反射率，α_{eff} は散乱なども考慮した等価吸収係数である。式 (4.41a)，すなわち，

$$g_{\mathrm{th}} = \alpha_{\mathrm{eff}} + \frac{1}{2L}\ln\left(\frac{1}{R_1R_2}\right) \tag{4.42}$$

は，利得が内部損失と反射鏡損失とつりあう条件，式 (4.41b)，すなわち，

$$\lambda_m = \frac{2nL}{m} \qquad (m = 0, 1, 2, \dots) \tag{4.43}$$

は定在波条件であり，この 2 つが同時に成り立てば，共振器中を一往復した後の光の振幅，位相が出発時と一致しているという定常発振が実現する。しかし，式 (4.42) は多少書き換えが必要である。というのは，我々が考えているデバイスは導波層（活性層）のみに利得のある導波路型レーザだからである。活性層・n 型クラッド層・p 型クラッド層のパワー閉じ込め係数を $\Gamma_a, \Gamma_n, \Gamma_p$，活性層の利得を g_a，活性層・n 型クラッド層・p 型クラッド層の等価吸収係数を $\alpha_a, \alpha_n, \alpha_p$ とすると，

$$g = \Gamma_a g_a \tag{4.44a}$$

$$\alpha_{\mathrm{eff}} = \Gamma_a\alpha_a + \Gamma_n\alpha_n + \Gamma_p\alpha_p \tag{4.44b}$$

なので，ダブルヘテロ型レーザの**しきい利得 (threshold gain)**g_{th} は

$$\Gamma_a g_{\mathrm{th}} = \alpha_{\mathrm{eff}} + \frac{1}{2L}\ln\left(\frac{1}{R_1R_2}\right) \tag{4.45}$$

で与えられる。通信用の InGaAsP レーザの場合，$R_1 = R_2 = 32$ %，$L \simeq 300$ μm，$\alpha \simeq 10$ cm^{-1} なので，$\Gamma_a g_a \simeq 50$ cm^{-1} である。

半導体レーザへの注入電流を増加させていくと利得スペクトルが成長し，そのピーク値が式 (4.45) を満たす電流 I_{th}（**しきい電流 (threshold current)**）で発振が始まり，式 (4.43) を満たす波長のうち利得スペクトルのピーク付近で最大利得となる波長で発振することになる。

半導体レーザの発振前後の電流-光出力特性を，レーザ共振器内の光子密度 S と電子密度 N とに関するレート方程式を用いて解析しよう。

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{I}{eLWd} - G(N - N_0)S - \frac{N}{\tau_n} \tag{4.46a}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = G(N - N_0)S - \frac{S}{\tau_p} \tag{4.46b}$$

ここで，I は注入電流，L, W, d は活性層の長さ・幅・厚さ，τ_n はキャリア寿命，τ_p は共振器内に光子のとどまる時間（光子寿命）である。誘導放出による効果は，利得が $N - N_0$ に比例する（N_0 は利得が 0 となる電子密度）として $G(N - N_0)S$ として取り入れた。また，自然放出光のレーザ発振への

寄与は大きくないとして無視した。定常状態では，

$$G(N - N_0)S + \frac{N}{\tau_n} = \frac{I}{eLWd} \tag{4.47a}$$

$$\left[G(N - N_0) - \frac{1}{\tau_p}\right]S = 0 \tag{4.47b}$$

となる。レーザ発振しきい値以下ではレーザ光がないので $S = 0$ とすると，式 (4.47a) より，

$$N = \frac{I\tau_n}{eLWd} \qquad (I < I_{\mathrm{th}}) \tag{4.48}$$

となる。発振状態では $S \neq 0$ なので，式 (4.47b) より

$$N = N_{\mathrm{th}} = N_0 + \frac{1}{\tau_p G} \qquad (I \geq I_{\mathrm{th}}) \tag{4.49}$$

となり，発振しきい値以上では電子密度は N_{th} に固定される。これを式 (4.47a) に代入すると，

$$S = \frac{\tau_p}{eLWd}\left(I - \frac{eV_a N_{\mathrm{th}}}{\tau_n}\right) = \frac{\tau_p}{eLWd}(I - I_{\mathrm{th}}) \qquad (I \geq I_{\mathrm{th}}) \tag{4.50}$$

となる。すなわち，光出力は

$$I_{\mathrm{th}} = \frac{eLWdN_{\mathrm{th}}}{\tau_n} = \frac{eLWd\left(N_0 + \frac{1}{\tau_p G}\right)}{\tau_n} \tag{4.51}$$

で与えられるしきい電流以下では 0，しきい値以上では $I - I_{\mathrm{th}}$ に比例して増大する。[*16]発振後はしきい電流より余剰に注入された電流は発振モードのレーザ光に変換されるので，擬フェルミレベルは固定され（活性層中の電子・ホール密度は増加しない），利得スペクトルも固定される（**利得飽和 (gain saturation)**）のである。

ここで，半導体レーザの偏光について述べておこう。通常のバルク半導体では利得や吸収に異方性がないので，どのような偏光で発振するかは反射鏡の反射率によって決まる。TE モードは端面で s 偏光として反射し，一方，TM モードは p 偏光で反射する。s 偏光に対する反射率は p 偏光よりも高いので，TE モードのしきい利得のほうが TM モードのしきい利得よりも小さくなり，先に発振しきい値に達した TE モードの方で発振することになる。

■実用上重要なパラメータ　半導体レーザを実際に使用するにあたって重要となるいくつかのパラメータをまとめておこう。

まず，動作温度が高くなるとしきい電流が大きくなる。これは，利得スペクトルの広がりとキャリアのオーバーフローが主な原因で，これに加えてオージェ過程による非発光再結合や価電子帯内吸収などが影響している。しきい電流の温度依存性は経験的に

$$I_{\mathrm{th}} \propto \exp(T/T_0) \tag{4.52}$$

で与えられる。T_0 はしきい電流の温度依存性を特徴づけるパラメータ（特性温度とよばれる）で，これが大きいほど温度依存性の小さい（良い）レーザということになる。（赤色）InGaP 系レーザと（短波長）AlGaAs 系レーザの T_0 は 100~150 K 程度，（長波長）InGaAsP 系レーザで 50~70 K である。

[*16] 自然放出の寄与を考慮すると，しきい値以下でも若干の光出力が得られることがわかる。これは，コヒーレントでない自然放出光出力であり，この状態ではデバイスは発光ダイオード (light emitting diode, LED) として動作している。

レーザの効率の目安として，しばしば，

$$\eta_S = \frac{\Delta P}{\Delta I} \tag{4.53}$$

で定義される**スロープ効率 (slope efficiency)** が用いられる。ここで，ΔI は発振状態での電流の増加分，ΔP はそれに対応する光出力の増加分で，通常，W/A（あるいは mW/mA）の単位が用いられる。**外部微分量子効率 (external quantum efficiency)** は注入キャリア 1 個につき外部に放出される光子の数で定義され，

$$\eta_{\mathrm{ex}} = \frac{\Delta P/(\hbar\omega)}{\Delta I/e} = \eta_S \frac{e}{\hbar\omega} \tag{4.54}$$

で与えられる（無次元量である）。これは，注入キャリア 1 個あたり共振器内部に発生する光子の数で定義される**内部微分量子効率 (internal quantum efficiency)** η_{in} と以下のような関係にある。

$$\eta_{\mathrm{ex}} = \eta_{\mathrm{in}} \frac{\frac{1}{2L}\ln\frac{1}{R}}{\alpha_{\mathrm{eff}} + \frac{1}{L}\ln\frac{1}{R}} \tag{4.55}$$

$\eta_{\mathrm{in}} = 100$ % と仮定すると，$L = 300$ μm, $R = 32$ %, $\alpha_{\mathrm{eff}} = 20\ \mathrm{cm}^{-1}$ の場合，$\eta_{\mathrm{ex}} = 33$ % となる。[*17]実際，よく制御された半導体レーザでは，内部微分量子効率は 100 % 近い値となる。

4.3.3 半導体レーザの縦モードと横モード

ファブリ・ペロー型半導体レーザでは，共振器の反射鏡面として，半導体結晶の劈開面をそのまま用いることが多い。この共振器の共振条件は共振器長 L によって決定され，式 (4.43) で与えられる。レーザ発振する可能性のある波長は離散的な値を取り，これをレーザの**縦モード (longitudinal mode)**，あるいは**軸モード (axial mode)** とよぶ。縦モード間隔は，m が十分大きい場合には

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\left(n - \lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)L} \tag{4.56}$$

となる。$L = 300$ μm のレーザでは，$\Delta\lambda$ は 0.3 nm（波長 0.8 μm）〜1.1 nm（波長 1.55 μm）で，共振器長の長い他のレーザと比較するとはるかに大きな値である。しかし，半導体レーザの利得スペクトル幅（> 10 nm）と比較すると縦モード間隔はずっと小さく，隣接モード間の利得差が極めて小さいために，モード競合が起こりやすくまた，縦多モード発振の原因ともなる。一般的な（縦モード制御をしていない）半導体レーザは低出力時には縦多モード発振するが，レーザ出力を増していくとパワーは 1 本の縦モードに集中していき，他のモードのパワーは飽和する。この状態では縦単一モード発振であるが，高速変調時には多モード発振となる（このようなレーザを静的単一モードレーザという）。また，レーザの種類によっては高出力時にも縦多モード発振を維持するものもある。

特別な温度制御をせずに動作している半導体レーザの発振スペクトルを詳細に見ると，光出力の増加に伴なって発振波長が長波長側にシフトしていることがわかる。これは，電流の増加に伴なって活性領域の温度が上昇しているためである。バンドギャップエネルギーが温度上昇に伴なって減少し，その結果，利得スペクトルが長波長側へ移動するため，温度上昇とともに発振モードが長波長のモードへ不連続に移っていく（**モードホッピング (mode hopping)**）。また，各モード波長もゆるやかに長波長シフトするが，これは屈折率の温度依存性によるものである。

[*17] ここでの $\eta_S, \eta_{\mathrm{ex}}$ は片面からの出力に対して定義されていることに注意。

実用的な半導体レーザの大部分は，いわゆるストライプ構造を採用している。ストライプの幅は 1〜数 μm である。ストライプ構造を採用することによって，しきい電流の低減と発振**横モード (transverse mode)**，すなわちビームプロファイルの制御が可能となる。活性層厚は通常しきい電流を小さくするために 0.1 μm 程度となっているので，ストライプ型半導体レーザの活性領域のサイズは 1〜数μm（幅）× 0.1 μm（厚さ）程度と極めて小さい。これは光の波長程度の大きさなので，半導体レーザ光は回折効果によって広がって出射されることになる。

レーザ端面上でのレーザ光の強度分布像を**近視野像 (near-field pattern, NFP)**，端面から十分遠方での光強度分布，すなわち回折像を**遠視野像 (far-field pattern, FFP)** という。ヘテロ接合に垂直な方向では回折広がり角が大きく，$\theta_\perp$ は 30〜60 度，平行な面内では $\theta_\parallel$ は通常 10〜30 度である。活性層厚 d を小さくするにつれ近視野像半値全幅 $W_\perp$ は小さくなるので遠視野像の半値全角 $\theta_\perp$ は広がっていくが，d が半導体中の波長 λ_0/n よりも小さくなると，光閉じ込め効果が弱くなってクラッドに光がしみ出してしまい，$W_\perp$ はむしろ大きくなり $\theta_\perp$ は小さくなる。

いずれにせよ，半導体レーザからの出力光は大きく広がっており，レンズなどを併用する必要がある。しかしながら，接合面に垂直・平行いずれの方向でも単一横モード（基本横モードのみしか伝搬できない）にできるので，ほぼ回折限界への集光が可能である。

4.4 半導体レーザの材料

4.4.1 材料に要求される特性

半導体レーザで用いられる半導体には以下のような性質が要求される。

1) **直接遷移型半導体であること**[*18]
   発光デバイスの材料は発光効率の高い直接遷移型でなければならない。GaAs, InAs, InP などは直接遷移型だが，AlAs, GaP, AlP などは間接遷移型である。これらの混晶はその組成によって遷移のタイプが異なることになる。たとえば，$Al_xGa_{1-x}As$ は AlAs に近い組成では間接遷移型，GaAs に近い組成では直接遷移型となる。
2) **バンドギャップエネルギーが所望の値であること**
   通常条件下での発光はバンド端での電子正孔対の再結合によって起こるので，所望の波長の発光を得るためにはそれに対応したバンドギャップを有する材料を用いなければならない。
3) **基板結晶と結晶構造が同じで格子定数が一致すること**
   光デバイスを作製するには異種材料を積層してヘテロ構造を構築する必要がある。その際，積層構造を構築するために基板がまず必要で，その上に成長する結晶は基板結晶と同じ結晶構造を有し，かつ，格子定数も同じ（これを**格子整合 (lattice match)** するという）でなければならない。[*19] 異種基板上に下地の結晶構造と方位を引き継いで結晶成長をおこなう手法を**ヘテロエピタキシー (heteroepitaxy)** とよぶ。

すなわち，半導体レーザの材料としては，バンドギャップと格子定数の要求を同時に満たす材料を探し出さねばならないことになる。基板として用いることのできる結晶は限られており，閃亜鉛鉱型の半導体では GaAs, InP, GaP, InAs, GaSb のみである。これらの基板結晶と格子整合し，かつ所

[*18] 厳密に言えば，活性層などの発光を担う部分以外は間接半導体でも構わない。
[*19] これも厳密に言えば絶対的な制約条件ではないが，**格子定数差 (lattice mismatch)** が大きな結晶成長は極めて難易度が高い。

表 1　実用化されている半導体レーザ材料

波長 (μm)	活性材料	クラッド材料	基板
0.75 ～ 0.9	$Al_xGa_{1-x}As$	$Al_yGa_{1-y}As$	GaAs
1.1 ～ 1.65	$In_{1-x}Ga_xAs_{1-y}P_y$	$In_{1-x'}Ga_{x'}As_{1-y'}P_{y'}$	InP
0.62 ～ 0.69	$(Al_xGa_{1-x})_{0.5}In_{0.5}P$	$(Al_yGa_{1-y})_{0.5}In_{0.5}P$	GaAs
0.94 ～ 1.05	$Ga_xIn_{1-x}As$	$Al_yGa_{1-y}As$	GaAs
紫 ～ 青	(Al)GaInN	(Al)GaInN	サファイア/GaN

望のバンドギャップを有する直接遷移型の化合物半導体の種類は決して多くはない。格子定数とバンドギャップはともに組成の関数なので，パラメータが 1 つしかない 3 元混晶では，格子整合系で望みのバンドギャップを得ることはできない。これに対して，4 元混晶では格子整合系においてもバンドギャップを制御することが可能である。最初に実用化された半導体レーザは GaAs 基板上の AlGaAs 系であった。実は，これは AlAs と GaAs の格子定数がほぼ同じであったという偶然のおかげであった。一方，長波長帯の半導体レーザである InGaAsP レーザ（InP 基板）では 4 元混晶の利点が活かされている。

4.4.2　実用化されている半導体レーザ材料

実用化されている半導体レーザの活性層・クラッド・基板材料を**表1**にまとめる。半導体レーザのデバイス開発は，材料開発そのものと言ってもよい。また，結晶成長や微細加工などの製造技術の開発も極めて重要である。

5　半導体レーザの開発

半導体レーザの研究・開発は，まさに材料となる化合物半導体の研究・開発そのものであったといってよい。また，半導体レーザに特徴的なヘテロ構造の作り付けにもっとも重要な役割を果たす結晶成長，特にヘテロエピタキシ技術の理解がこれらのデバイス・材料の開発過程の理解に不可欠である。

以下では，開発された時系列順に各波長帯の半導体レーザの材料の特性とデバイス応用について簡単にまとめる。

5.1　AlGaAs 系半導体レーザ

5.1.1　研究・開発の経緯

$Al_xGa_{1-x}As$ は，いうまでもなく，AlAs と GaAs の混晶であるが，全率固溶で，しかも（AlAs と GaAs の格子不整合がわずか 0.12 % であることから）全組成にわたって GaAs にほぼ格子整合するという際立った特徴を有する化合物半導体混晶である。また，Al と Ga の結合半径が極めて近いことから，III 族副格子上での配列が最もランダムになっていると考えられている。こうした性質を有する材料が最初の半導体レーザの材料として選ばれたのはまったく幸運であった。

1960 年の Maiman によるルビーレーザの発振成功に前後して半導体レーザの研究が活発化した。液体窒素温度でのパルス発振はその後まもなく，1962 年に GE，IBM，イリノイ大，MIT の 4 ヶ所

で相次いで達成された。これはいずれも GaAs ホモ接合によるものであった。しかし，その後の室温連続発振への挑戦は容易なものではなく，多くの落伍者が相次ぐこととなった。1963 年に Kroemer によって提案されたダブルヘテロ構造が必須であったが，良質なヘテロエピタキシャル構造の実現にはその後の結晶成長技術の発展を待つ必要があった。この時期に開発されたスライドボート式**液相成長 (liquid phase epitaxy, LPE)** 法は熱平衡状態から極めて良質の結晶を再現性よく成長でき，しかもそれなりに急峻な界面を有する薄膜を形成できる優れた方法で，その後の実用化後も量産技術の柱として長く用いられることとなった。GaAs/AlGaAs ダブルヘテロレーザによる室温連続発振は，1970 年にまず Ioffe 研究所の Alferov によって，次いでほぼ同時に Bell 研の林・Panish によって，さらに RCA の Kressel によって達成された。これとほぼ同時に Corning 社から当時としては桁外れに低損失なガラスファイバの開発が報告され，世界中で再び半導体レーザ開発競争が再開されることとなった。もちろん，日本の企業も多数参戦し，その後の実用化へ向けての開発の過程での日本企業の研究者たちの貢献は特筆すべきものがある。

実用的な半導体レーザの開発のキーポイントは安定動作の実現にあった。最重要課題は，劣化の抑制（長寿命化），横モード制御，ノイズの回避である。以下では，劣化の問題を取り上げる。

5.1.2 半導体レーザの劣化

1970 年当時のダブルヘテロレーザの寿命は数分から数十分程度であった。懸命の研究によって劣化のメカニズムが解明され，それを克服することが可能となった結果，10 万時間を越えるとされる長寿命のレーザが実現されるに至った。

■バルク劣化 活性層内部の結晶欠陥の増殖が数分から数十時間のタイムスケールで起こる急速劣化の原因とされる。結晶欠陥は非発光性再結合中心となり，これが応力下での通電によって増殖することで暗線欠陥（dark line defect, DLD）として観測されるようになる。低転位密度の GaAs 基板を用い，欠陥の少ない結晶成長をおこない，デバイス作製工程での応力発生を極力抑えることで，このバルク欠陥の問題は解決された。

■端面劣化 AlGaAs 系半導体レーザの端面には厚さ数 10Å の自然酸化膜が形成されている。この端面では欠陥などの影響でバンドテイリングが生じ，発振レーザ光の吸収に続いて起こる非発光再結合によって温度が上昇してさらにバンドギャップが小さくなる，という一連の過程に正のフィードバックがかかり，端面が破壊されるという**光学損傷（catastrophic optical damage, COD）**が起こる。AlGaAs レーザにおける COD レベルは 4×10^6 W/cm^2 とされている。破壊限界を高めるためには，端面のコーティングや窓構造（端面付近のバンドギャップを若干高くする）の採用，出射端付近で横モードを広げるなどの工夫に加えて，気密パッケージングなどが有効である。それでもやはり，不用意に大電流を流してしまうと巨大な光出力によって COD が発生し，レーザが破壊されてしまうことがある。こうしたサージ破壊からレーザを保護するため，通常は駆動電源にサージ電流を防止する回路が組み込まれる。

■電極劣化 電極劣化はすべての半導体デバイスに見られる共通の劣化現象であるが，現在では，適切な電極材料の選択とプロセスの改善によって回避できるようになっている。

5.1.3　応用

半導体レーザの開発競争は光ファイバ通信を本命の応用として開始されたが，1970 年代の中ごろから光ディスクやレーザプリンタへの応用が検討された。1979 年にはキヤノンから半導体レーザを用いたレーザプリンタが発売された。これに続いて，1982 年に CD-DA（ソニーと Philips が規格を定めた音楽再生用コンパクトディスク）が実用化され，その再生装置（CD プレーヤ）のピックアップに発振波長 780 nm の AlGaAs レーザが採用された。

この波長帯のレーザは現在では，量産性に優れた**有機金属気相エピタキシー (metal-organic vapor phase epitaxy, MOVPE)** 法や**分子線エピタキシー (molecular beam epitaxy, MBE)** 法によって大量生産され，価格は 1 個数十円まで下がっている。

5.2　InGaAsP 系レーザ

5.2.1　研究・開発の経緯

InGaAsP は初めて本格的に研究の俎上にのせられた四元半導体混晶で，格子定数とバンドギャップエネルギーを独立にコントロールできるという四元混晶の強みが発揮された。InP 基板に格子整合する組成では，InP の 1.35 eV から $In_{0.53}Ga_{0.47}As$ の 0.72 eV までバンドギャップを変化させることができる。ガラスファイバの最低損失波長が 1.55 μm であること，ゼロ分散波長が 1.3 μm であることがあきらかになって以降，InGaAsP/InP 半導体レーザは光ファイバ通信用光源として大きな期待を集めることとなるが，AlGaAs 系レーザにおける劣化の問題が結晶欠陥と密接に結びついていることがはっきりしたことから，InGaAsP 系レーザの実用化に対して悲観的なムードもあったようである。しかしながら，開発の過程で，InGaAsP レーザではバルク劣化，端面劣化が生じにくいことが次第にあきらかとなり，開発が加速された。InGaAsP 長波長レーザの室温連続発振は 1976 年に東工大，NTT，KDD のグループから報告された。InP 基板上 GaInAsP は LPE で良質な結晶が成長でき，開発の過程でこれが大きな役割を果たしたが，膜厚制御性と量産性に優れた MOVPE 法が結晶成長法の主役となっている（埋め込み成長には一部 LPE 法も使われている）。

5.2.2　応用

分析やリモートセンシング（多くの分子の分子振動の高調波や結合波が 1~2 μm の領域にある）にも一部用いられているが，やはり最大の用途は光通信である。**動的単一縦モード動作**を可能とした**分布帰還型 (distributed feedback, DFB) レーザ**[*20]が用いられる。AlGaAs 系レーザと比較して特性温度 T_0 が小さく（伝導帯のバンドオフセットをあまり大きく取れないためにキャリアのオーバーフローが大きくなるのが最大の原因である），温度制御が不可欠なのが欠点ではある。これ以外には，光通信に革命を起こしたといってもよい EDFA（エルビウムドープ光ファイバ増幅器）の励起光源として，発振波長 1.48 μm の InGaAsP/InP レーザと 0.98 μm の InGaAs/GaAs 歪量子井戸レーザが用いられている。

[*20] DFB レーザの室温連続発振は 1974 年，日立の中村らによって達成された。

5.3　AlGaInP 系レーザ

5.3.1　研究・開発の経緯

GaAs 基板に格子整合する $(Al_xGa_{1-x})_{0.5}In_{0.5}P$ は赤色領域で発振可能な四元混晶半導体である。Al の偏析が大きいため，液層からの成長は極めて困難で，研究開発の当初から MOVPE 法が用いられた。「可視」半導体レーザの材料としての期待は大きく，エピタキシャル成長が可能となった 1980 年代の初頭から日本企業を中心に開発競争が繰り広げられた。この過程で，後述する自然超格子の形成という思いもかけない現象が起こることがあきらかとなった。これは，混晶のバンドギャップは組成によって一意に決定されるというそれまでの常識を覆すもので，半導体研究の分野でも意義の大きな発見であったといえる。赤色レーザの室温連続発振は 1985 年，ソニー，NEC，東芝のグループによって相次いで達成された。1988 年には 1 万時間以上の寿命が達成され，赤色半導体レーザが市場に投入された。ちなみに，AlGaInP レーザの COD レベルは $1.4 \sim 2\times10^6$ W/cm^2 で，AlGaAs レーザよりも低く，高出力化には AlGaAs レーザ以上の配慮が必要である。

5.3.2　自然超格子

完全秩序化 $Ga_{0.5}In_{0.5}P$ のバンドギャップは 1.918 eV であるが，MOVPE 法で GaAs(001) 基板上に成長した場合には成長条件によっては約 100 meV もバンドギャップが小さくなることが見出された。この “バンドギャップ異常” の原因は自然超格子の形成であった。これは，III 族副格子上での Ga と In の秩序だった配列によるものである。具体的には，$[\bar{1}11]$B 方向（一部 $[1\bar{1}1]$B 方向）に Ga 過剰面と In 過剰面とが交互に積層された CuPt 型超格子構造である。秩序度は成長温度や基板面方位によって変化する。基板方位を (001) から [111]B 方向に 6° ないし 8° 傾斜させた基板上に成長した場合に秩序度が最大（40 % 程度）となる。一方，(001) から [111]A 方向に基板を傾斜させていくと秩序度は単調に減少し，十数度でほぼ無秩序となる。

一方，MBE 成長した AlGaInP の秩序度は非常に小さいといわれている。

自然超格子の形成はバンドギャップの低下（すなわち発振波長の長波長化）を引き起こすので，発振波長の制御に強く影響することになる。

5.3.3　応用

赤色半導体レーザはレーザポインタやバーコードリーダにも利用されているが，なんといっても最大のマーケットは光ディスクである。波長 650 nm/635 nm の赤色レーザが DVD ドライブのピックアップに採用されて大量に利用されている。

5.4　GaInN 系レーザ

5.4.1　研究・開発の経緯

緑色，青色，紫色レーザは，半導体レーザの研究・開発に携わるものにとって長年の夢であった。当然，材料としてはワイドギャップの半導体を用いる必要があり，II-VI 族の ZnSe 系と III-V 族の GaN 系がもっとも有望であると考えられてきた。それまでのレーザ開発の経験から，結晶欠陥の少ない結晶成長ができることが開発のキーポイントであることが身にしみてわかっていたので，GaAs に格子定数の近い ZnSe 系が有利と考える研究者のほうが多かった。実際，1991 年に 3M 社が II-VI

青緑色レーザのパルス発振（77 K）を報告すると，世界中の研究者がなだれを打って II-VI 系半導体レーザの開発に参入し，窒化物系の研究人口が激減してしまった。しかし，II-VI 系レーザの長寿命化は思うように進まなかった。一方，六方晶系であるウルツ鉱型結晶構造を有する GaN は，格子整合する良質な基板材料がなく，まともな結晶成長ができると考える研究者は多くなかった。

こうした状況から 20 世紀中の青色レーザの開発は不可能ではないかとの雰囲気が色濃くなっていた中，孤軍奮闘していた赤崎らは，MOVPE 法によってファイア基板上に低温堆積緩衝 AlN 膜を挿入することで高品質の GaN エピタキシャル成長が可能であることを見出した。また，彼らは，アクセプタとしてドープした Mg を低速電子線照射によって活性化し，p 型 GaN を作製することにも成功した。これらはその後の窒化物系レーザの開発の方向を決定付けた極めて重要なブレークスルーであった。その後，日亜化学の中村が，水素による Mg アクセプタのパッシベーションが問題であることを初めて明らかにし，アニーリングによる活性化という大量生産に適した手法を開発した。中村らはツーフロー MOCVD と呼ばれる結晶成長法と上述のアクセプタ活性化を駆使して開発を進め，ついに，1996 年に青色半導体レーザの室温連続発振に成功した。活性層には InGaN 量子井戸が用いられた。閾値の低減には，やはり結晶の欠陥密度低減が重要で，現在では，サファイア基板上に横方向成長した GaN（epitaxially laterally overgrown GaN, ELOG）や GaN 単結晶厚膜を基板として用いる方向で開発が進んでいる。

2002 年 11 月現在，366 nm から 483 nm までの範囲の発振波長のレーザが実現されている。

5.4.2　応用

青色レーザの最大のマーケットは次世代大容量光ディスクである。次世代 DVD（HD-DVD と Blu-ray ディスク）の光源としては発振波長 405 nm のレーザが用いられる。2003 年には青色半導体レーザを搭載した最初の光ディスクドライブが市場に登場した。

5.4.3　その他の展開

GaNAs は奇妙な性質を持つ三元混晶半導体である。GaNAs のバンドギャップは GaAs から GaN へ向かって As 組成とともに単調に増加するのではなく，As（N）組成が小さいところでは As（N）組成の増加とともにバンドギャップが著しく減少する。すなわち，この混晶ではバンドギャップのボウイング（たわみ）が異常に大きい。理論計算によると，GaNAs のバンドギャップは組成によっては負の値ををとる（すなわち金属になる）といわれている。そのため，GaAs に格子整合する GaInNAs は 1.5 eV から 0 eV までのバンドギャップをとることが可能となり，これを用いて光通信波長帯で動作する半導体レーザが実現できる可能性がある。$Ga_{0.7}In_{0.3}N_{0.01}As_{0.99}$/GaAs レーザでは伝導帯のオフセットを約 350 meV と，GaInAsP 系の 3 倍以上に大きくすることができ，温度特性を大幅に改善できるのではないかと期待されている。

一方，InN についても新しい動きが出てきている。InN のバンドギャップは 1.9 eV であると長く信じられてきたが，これが間違いであったことがほぼ確実となっている。InN の真のバンドギャップは 0.8 eV 程度であるといわれている。これが利用できれば，上述のバンドギャップボウイングを用いることなく窒化物系で通信波長帯をカバーできる可能性がある。

6　高機能半導体レーザ

6.1　量子井戸レーザ

6.1.1　III-V 族化合物半導体の電子構造

閃亜鉛鉱構造を有する半導体では，構成原子が sp^3 混成軌道による正四面体的結合を形成し，伝導帯の底付近は s 軌道的，価電子帯の頂上付近は p 軌道的な性格を持つ。p 軌道的性格を有する価電子帯は全角運動量を用いて分類される以下の 3 つのバンドから構成される。

重い正孔 (heavy hole) (Γ_8)

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + \mathrm{i}Y)\alpha \tag{6.1a}$$

$$\left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(X - \mathrm{i}Y)\beta \tag{6.1b}$$

軽い正孔 (light hole) (Γ_8)

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}}\left[(X + \mathrm{i}Y)\beta - 2Z\alpha\right] \tag{6.2a}$$

$$\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[(X - \mathrm{i}Y)\alpha + 2Z\beta\right] \tag{6.2b}$$

スプリットオフバンド (spin-orbit split-off band) (Γ_7)

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(X + \mathrm{i}Y)\beta + Z\alpha\right] \tag{6.3a}$$

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\left[-(X - \mathrm{i}Y)\alpha + Z\beta\right] \tag{6.3b}$$

ここで，$\left|j, m_j\right\rangle$ の j と m_j はそれぞれ全角運動量とその z 成分 の固有値を与える量子数（$\boldsymbol{j}^2$ の固有値は $j(j+1)$，j_z の固有値は m_j）である。重い正孔と軽い正孔は Γ 点 ($\boldsymbol{k} = 0$) で縮退し，スプリットオフバンドはスピン軌道相互作用によって分裂している。そのエネルギー差は GaAs の場合で $\Delta_0 = 0.34$ eV，InP で $\Delta_0 = 0.11$ eV である（$\Delta_0 > 0$ はスプリットオフバンドが下にあることを示す）。

一方，伝導帯はスピン以外の縮退はなく，

電子 (electron) (Γ_6)

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle_{\mathrm{cb}} = S\alpha \tag{6.4a}$$

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_{\mathrm{cb}} = S\beta \tag{6.4b}$$

となっている。

電子（Γ_6 バンド）とスプリットオフ正孔（Γ_7 バンド）は分散が球対称で，その有効質量は方向によらず一定となる。GaAs では $m_{\mathrm{e}}^* = 0.067m_0$，$m_{\mathrm{so}}^* = 0.15m_0$（$m_0$ は電子の静止質量）である。それに対して，重い正孔と軽い正孔（Γ_8 バンド）は立方対称で，方位によって有効質量が異なる。$\boldsymbol{k} \parallel (100)$ では

$$m_{\mathrm{hh}} = (\gamma_1 - 2\gamma_2)^{-1}m_0 \tag{6.5a}$$

$$m_{\mathrm{lh}} = (\gamma_1 + 2\gamma_2)^{-1}m_0 \tag{6.5b}$$

$\boldsymbol{k} \parallel (111)$ では

$$m_{\mathrm{hh}} = (\gamma_1 - 2\gamma_3)^{-1} m_0 \tag{6.6a}$$

$$m_{\mathrm{lh}} = (\gamma_1 + 2\gamma_3)^{-1} m_0 \tag{6.6b}$$

で与えられる。ここで，$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ は Luttinger パラメータと呼ばれる量で，GaAs の場合，$\gamma_1 = 6.85$, $\gamma_2 = 2.10$, $\gamma_3 = 2.90$（したがって，$\boldsymbol{k} \parallel (100)$ で $m_{\mathrm{hh}} = 0.38m_0$, $m_{\mathrm{lh}} = 0.090m_0$，$\boldsymbol{k} \parallel (111)$ で $m_{\mathrm{hh}} = 0.95m_0$, $m_{\mathrm{lh}} = 0.079m_0$）とされている。

既出であるが，価電子帯，伝導帯間の結合状態密度は

$$J_{\mathrm{cv}} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\hbar\omega - E_g} \tag{6.7}$$

で与えられる。ここで，$\mu^{-1} = m_{\mathrm{e}}^{-1} + m_{\mathrm{h}}^{-1}$ である。すなわち，直接遷移型のバルク半導体のバンド間遷移の吸収スペクトルはほぼ $\sqrt{\hbar\omega - E_g}$ に比例する。

6.1.2　量子井戸

数 nm から μm 程度のサイズの微細な構造に電子，正孔を閉じ込めると，閉じ込め方向に運動が量子化されることにより種々の特殊な性質が現れてくる。電子などを 1 次元方向に閉じ込め 2 次元の運動の自由度を残した系を**量子井戸 (quantum well)** とよぶ。

無限大障壁 $V = \infty$ によって z 方向の L_z の範囲に閉じ込められた 2 次元系（量子井戸）を考えよう。z 方向の運動はポテンシャル

$$V(z) = \begin{cases} 0 & \left(|z| \le \dfrac{L_z}{2}\right) \\ \infty & \left(|z| > \dfrac{L_z}{2}\right) \end{cases} \tag{6.8}$$

によって量子化される。シュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{\mathrm{d}^2\phi(z)}{\mathrm{d}z^2} = E\phi(z) \quad \left(|z| \le \frac{L_z}{2}\right) \tag{6.9}$$

を満たし，$\phi(\pm L_z/2) = 0$ の境界条件を満足する解は

$$\phi(z) = \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin\frac{n\pi}{L_z}\left(z + \frac{L_z}{2}\right) \tag{6.10}$$

である。これに対応するエネルギー固有値は

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2 \tag{6.11}$$

となる。x, y 方向には自由運動で 3 次元の場合とまったく変わりはないので，無限障壁量子井戸の固有エネルギーは結局

$$\begin{aligned} E_n(\boldsymbol{k}) &= E_g + E_n + \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(k_x^2 + k_y^2\right) \\ &= E_g + \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(k_x^2 + k_y^2\right) \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{6.12}$$

で与えられる。光学遷移に関与する量子状態数の総和は

$$\frac{2}{(2\pi)^2}\int_0^k \delta(E - \hbar\omega)\, 2\pi k\, \mathrm{d}k = \frac{\mu}{\pi\hbar^2}\int_0^{E_n(k)} \delta(E - \hbar\omega)\, \mathrm{d}E \tag{6.13}$$

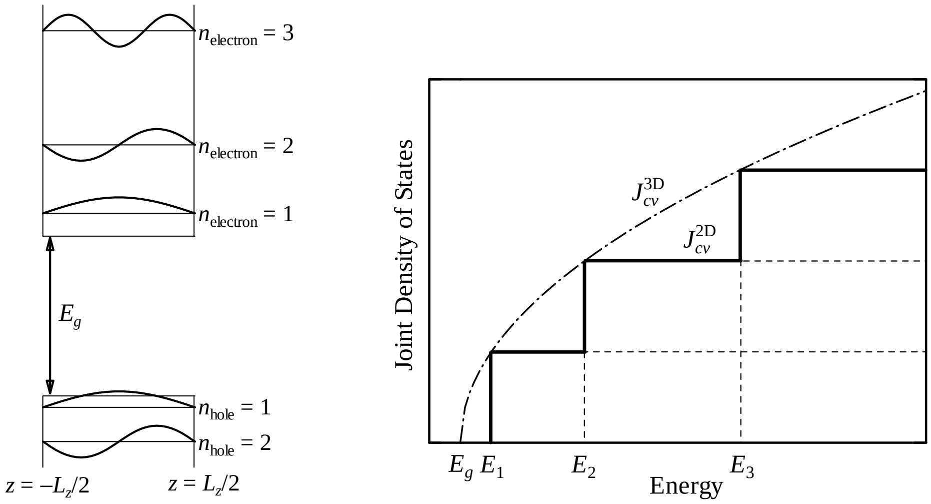

図 15　無限大障壁量子井戸の電子・正孔の波動関数（左）と状態密度関数（右）

となり[*21]，各量子準位 (n) を考慮すると，状態密度は

$$J_{\rm cv}^{\rm 2D} = \frac{\mu}{\pi\hbar^2}\sum_n \Theta(\hbar\omega - E_g - E_n) \tag{6.14}$$

となる。$\Theta(x)$ は $x < 0$ で 0，$x \geq 0$ で 1 となるステップ関数である。無限大障壁量子井戸の電子・正孔の波動関数と状態密度関数を**図15**に示す。量子井戸中の電子遷移の選択則は，

$$n_{\rm electron} = n_{\rm hole} \tag{6.15}$$

である。

■量子井戸中の電子　上述の量子閉じ込め効果により，量子井戸中の電子の運動は z 方向（閉じ込め方向，量子化軸）に量子化され，それに垂直な方向（x 方向，y 方向）に残った自由度による分散が加わる。その結果，電子の準位とその分散曲線は量子数 $n_{\rm electron}$ で表される複数の状態に分割されることになる。個々の量子数で指定される各状態を**サブバンド (subband)** とよぶ。

■量子井戸中の正孔　正孔も電子と同様に量子閉じ込め効果によりサブバンドが形成されることになるが，もともと複数の準位が存在すること，分散の異方性があることからその構造は極めて複雑なものとなる。

量子閉じ込め効果により，まず，バルク半導体では縮退していた $m_j = \pm\frac{3}{2}$ バンド（重い正孔）と $m_j = \pm\frac{1}{2}$ バンド（軽い正孔）とが分裂する。

ここで注意が必要なのは，量子井戸の場合には「重い正孔」，「軽い正孔」という呼び方はまったく無意味になってしまうことである。井戸層面内 (xy 面) での運動を特徴付ける有効質量は，$m_j = \pm\frac{3}{2}$ バンド（重い正孔）と $m_j = \pm\frac{1}{2}$ バンド（軽い正孔）に対してそれぞれ

$$m_{\rm hh}^{xy} = (\gamma_1 + \gamma_2)^{-1} m_0 \tag{6.16a}$$
$$m_{\rm lh}^{xy} = (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1} m_0 \tag{6.16b}$$

で与えられる。γ_2 は正なので $m_{\rm hh}^{xy} < m_{\rm lh}^{xy}$ となることに注意（量子化軸方向では $m_{\rm hh}^{z} > m_{\rm lh}^{z}$ である）。

[*21] 電子と正孔がともに量子化されていることに注意。そのために $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_{\rm e}} + \frac{1}{m_{\rm h}}$ が現れる。

この異方性による質量逆転のために，正孔のサブバンドは重い正孔・軽い正孔間の縮退が解けるだけでなく，バンド混合による著しい非放物線性などが導入されることになる。

■量子準位間の遷移　電子正孔間の遷移の運動量行列要素は TE, TM 各モードに対して以下の式で与えられる。

重い正孔-電子間遷移

$$|M_{\mathrm{hh}}|^2 = \begin{cases} \dfrac{3}{4}\,|M|^2\,(1+\cos^2\theta) = \dfrac{3}{4}\,|M|^2\left(1+\dfrac{k_z^2}{k^2}\right) = \dfrac{3}{4}\,|M|^2\left(1+\dfrac{E_{z,n}}{E_n}\right) & \text{（TE モード）} \\ \dfrac{3}{2}\,|M|^2\sin^2\theta = \dfrac{3}{2}\,|M|^2\left(1-\dfrac{k_z^2}{k^2}\right) = \dfrac{3}{2}\,|M|^2\left(1-\dfrac{E_{z,n}}{E_n}\right) & \text{（TM モード）} \end{cases} \tag{6.17}$$

軽い正孔-電子間遷移

$$|M_{\mathrm{lh}}|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\,|M|^2\,(1+\cos^2\theta) + |M|^2\sin^2\theta = \dfrac{1}{4}\,|M|^2\left(1+\dfrac{E_{z,n}}{E_n}\right) + |M|^2\left(1-\dfrac{E_{z,n}}{E_n}\right) & \text{（TE モード）} \\ \dfrac{1}{2}\,|M|^2\sin^2\theta + 2\,|M|^2\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}\,|M|^2\left(1-\dfrac{E_{z,n}}{E_n}\right) + 2\,|M|^2\,\dfrac{E_{z,n}}{E_n} & \text{（TM モード）} \end{cases} \tag{6.18}$$

ここで，$M = m_0\sqrt{\frac{1}{6m_{\mathrm{e}}^*}\frac{E_g(E_g+\Delta_0)}{E_g+\frac{2}{3}\Delta_0}}$ はバルク半導体における遷移の運動量行列要素，θ は量子化軸（z 軸）と電子の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ のなす角である。

サブバンド端（$E_{z,n} = E_n$ ゆえに $\theta = 0$）では，

$$|M_{\mathrm{hh}}|^2 = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\,|M|^2 & \text{（TE モード）} \\ 0 & \text{（TM モード）} \end{cases} \tag{6.19a}$$

$$|M_{\mathrm{lh}}|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,|M|^2 & \text{（TE モード）} \\ 2\,|M|^2 & \text{（TM モード）} \end{cases} \tag{6.19b}$$

となる。

6.1.3　量子井戸レーザ

活性層に量子井戸構造を導入した半導体レーザを**量子井戸レーザ (quantum-well laser)** という。ポテンシャル井戸がひとつのものを**単一量子井戸 (single quantum well, SQW)** レーザ，複数のものを**多重量子井戸 (multi quantum well, MQW)** レーザとよぶ。

最初の量子井戸レーザは 1975 年に van der Ziel らによって報告された。これは MBE によって成長された 8 重量子井戸構造を有するもので，液体窒素温度でしか発振しなかった。1981 年に Tsang によって低閾値レーザが実現され，全世界で量子井戸レーザに関する研究・開発が活発化した。

これまでに，**光・キャリア分離閉じ込め構造 (separate confinement heterostructure, SCH)** や**グレーデッドインデクス SCH (graded-refractive-index SCH, GRIN-SCH)** 構造など，多くの量子井戸レーザが開発されてきた。

量子井戸レーザでは，階段状状態密度を反映して，低閾値化，微分量子効率上昇，光出力上昇，特性温度上昇，変調可能周波数上昇，線幅増大係数（α パラメータ）減少といった好ましい特性が得られる。また，上述の偏光依存性によって利得に強い異方性が生じるところも，バルク（ダブルヘテロ (double heterostructure, DH)）レーザと際立って異なる特徴である。

6.1.4 歪量子井戸レーザ

基板と格子定数の異なる（格子不整合のある）結晶を成長しようとすると，ある膜厚以上で成長層に転位 (dislocation) が入り，良質な結晶成長ができなくなる。この転位の入り始める膜厚を**臨界膜厚 (critical thickness)** という。臨界膜厚以下では，転位が入らず，基板と同じ格子定数になるように歪んだ状態でコヒーレントなヘテロエピタキシャル成長が進行する。成長層の本来の格子定数が基板と比べて大きければ圧縮歪 (compressive strain) が，小さければ引張り歪 (tensile strain) が導入される。格子定数の違いによって生じた二軸性応力 (biaxial stress) のために，ヘテロ界面に平行な方向の格子定数が変化すると同時に，界面垂直方向の格子定数も変化する。この歪の導入によってバンド構造が変化し，レーザの特性向上を実現できる。活性層に歪のある量子井戸を導入したレーザを**歪量子井戸 (strained quantum well) レーザ**という。

基板の格子定数を a，成長層本来の格子定数を $a + \Delta a$ とすると，格子不整合による歪は

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\parallel} = -\frac{\Delta a}{a} \tag{6.20a}$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{\perp} \neq 0 \tag{6.20b}$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0 \tag{6.20c}$$

で与えられる。$\epsilon_{\parallel} < 0$ が圧縮歪に，$\epsilon_{\parallel} > 0$ が引張り歪に対応する。一方，これに作用する二軸性応力は

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma \tag{6.21a}$$

$$\sigma_{zz} = 0 \tag{6.21b}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \tag{6.21c}$$

なので，点群 $\bar{4}3m$ の閃亜鉛鉱型結晶では

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{\parallel} \\ \epsilon_{\parallel} \\ \epsilon_{\perp} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

が成り立つ。ここで，c_{ij} は 6×6 の行列形式に縮約した弾性定数 (elastic stiffness constant) テンソルである。これから，

$$\epsilon_{\perp} = -\frac{2c_{12}}{c_{11}}\epsilon_{\parallel} \simeq -\epsilon_{\parallel} \tag{6.23}$$

の関係があることがわかる。なお，多くの正四面体方構造の半導体では $c_{11} \simeq 2c_{12}$ の関係が成り立っている。また，この歪は，次のような体積変形歪 ϵ_{vol} と軸性変形歪 ϵ_{ax} の合成とみなすこともできる。

$$\epsilon_{\mathrm{vol}} = \frac{\Delta V}{V} \simeq \epsilon_{\parallel} \tag{6.24a}$$

$$\epsilon_{\mathrm{ax}} =\simeq -2\epsilon_{\parallel} \tag{6.24b}$$

この歪によってエピタキシャル膜内に膜厚に比例した応力エネルギーが蓄積し，これが転位発生に必要なエネルギーを超えるところが臨界膜厚である。格子不整合 $\Delta a/a$ が 1 % 程度のときの典型的な臨界膜厚は数十 nm 程度である。

上述の体積変形歪によって価電子帯と伝導帯がシフトする結果バンドギャップが変化し，軸性変形歪によって価電子帯の構造が変化する。前者によって発振波長の制御が，後者を利用して低閾値化，高速変調特性の向上，偏光の制御などが実現できる。GaInAsP 系長波長レーザ，AlGaInP 系赤色レーザ，AlGaInN 系青色レーザではこれらの歪量子井戸の特性が積極的に利用されている。

6.2　動的縦単一モードレーザ

高速変調時にも単一縦モード発振を実現するためには，縦モード選択性を持たせる機構をレーザに組み込む必要がある。外部帰還を用いる方法もあるが，レーザチップ内に**分布帰還 (distributed feedback)** 構造を組み込んだ半導体レーザが光ファイバ通信には用いられている。

6.2.1　分布帰還型レーザ

縦モード選択性を持たせるためにレーザ媒質内に回折格子を組み込んだレーザを**分布帰還型 (distributed feedback, DFB) レーザ**とよぶ。

ここでは，まず，周期構造による摂動の影響について考えよう。式 (1.1) の波動方程式は

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{6.25}$$

と書き換えられる。ここで，媒質の分極を無摂動分極と摂動分極に分離し，

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{P}_0(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{P}_{\mathrm{pert}}(\boldsymbol{r}, t) \tag{6.26}$$

としよう。ここで，$\boldsymbol{P}_0 = \epsilon_0(n^2(\boldsymbol{r}) - 1)\boldsymbol{E}$ である。すると，式 (6.25) は

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \epsilon_0 \mu_0 n^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_{\mathrm{pert}}}{\partial t^2} \tag{6.27}$$

となる。以下では，z 方向に伝搬する TE モードのみを考えることにし，電場の振動方向を y にとる。周期的摂動のある導波路中の伝搬モードを無摂動導波路の導波（固有）モードで展開する。

$$E_y(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_m A_m(z) \mathcal{E}_y^{(m)}(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \beta_m z)} + \mathrm{c.c.} \tag{6.28}$$

ここで，$\mathcal{E}_y^{(m)}$ は TE_{m+1} モードであり，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta_m^2\right) \mathcal{E}_y^{(m)}(\boldsymbol{r}) + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 n^2(\boldsymbol{r}) \mathcal{E}_y^{(m)}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{6.29}$$

を満たす。式 (6.28) を (6.27) に代入して，$\left|\frac{\mathrm{d}^2 A_m}{\mathrm{d}z^2}\right| \ll \beta_m \left|\frac{\mathrm{d}A_m}{\mathrm{d}z}\right|$ とすると，

$$-\mathrm{i} \sum_m \beta_m \frac{\mathrm{d}A_m}{\mathrm{d}z} \mathcal{E}_y^{(m)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \beta_m z)} + \mathrm{c.c.} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{P}_{\mathrm{pert}}(\boldsymbol{r}, t) \tag{6.30}$$

となる。これに $\mathcal{E}_y^{(s)}(x)$ をかけて x で積分すると，

$$\frac{\mathrm{d}A_s^{(-)}}{\mathrm{d}z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \beta_s z)} - \frac{\mathrm{d}A_s^{(+)}}{\mathrm{d}z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \beta_s z)} - \mathrm{c.c.} = -\frac{\mathrm{i}}{2\omega} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \boldsymbol{P}_{\mathrm{pert}}(\boldsymbol{r}, t) \mathcal{E}_y^{(s)}(x) \tag{6.31}$$

が得られる。ここでは，$+z$ 方向に伝搬する前進波と $-z$ 方向に伝搬する後退波の両方を考慮している。導波層に周期 Λ，深さ a の矩形上の凹凸がある場合を考えよう。全誘電率を $\epsilon' = \epsilon + \Delta\epsilon$ としたときの周期構造による摂動 $\Delta\epsilon$ に起因する分極は

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{pert}}(\boldsymbol{r},t) = \Delta\epsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \epsilon_0 \Delta n^2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{6.32}$$

と表せるので，式 (6.31) は

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}A_s^{(-)}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\beta_s z)} - \frac{\mathrm{d}A_s^{(+)}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_s z)} - \mathrm{c.c.} = \\ &-\frac{\mathrm{i}\epsilon_0}{4\omega}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_m\left(A_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_m z)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\Delta n^2(x,z)\mathcal{E}_y^{(m)}(x)\mathcal{E}_y^{(s)}(x) + \mathrm{c.c.}\right)\end{aligned} \tag{6.33}$$

となる。摂動 $\Delta n^2(x,z)$ は

$$\Delta n^2(x,z) = \Delta n^2(x)\sum_{q=-\infty}^{\infty} K_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2q\pi/\Lambda)z} \tag{6.34}$$

とフーリエ展開できるので，式 (6.33) の右辺のうち，

$$\frac{2l\pi}{\Lambda} - \beta_s \simeq \beta_s \tag{6.35}$$

を満たす項のみが支配的となり，

$$\frac{\mathrm{d}A_s^{(-)}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{i}\omega\epsilon_0}{4}A_s^{(+)}K_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2l\pi/\Lambda-2\beta_s z)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\Delta n^2(x)[\mathcal{E}_y^{(s)}(x)]^2 \tag{6.36}$$

と書ける。すなわち，回折格子状の摂動によって前進波と後退波の間の結合が生じることになる。前進波の振幅を $A_s^{(+)} = R$，後退波の振幅を $A_s^{(-)} = S$ とすると，その振る舞いは以下の**結合波方程式 (coupled-wave equation)** にまとめられる。

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z} = \kappa R\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Delta\beta z} \tag{6.37a}$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z} = \kappa^* S\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Delta\beta z} \tag{6.37b}$$

ここで，

$$\kappa = \frac{\mathrm{i}\omega\epsilon_0}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\Delta n^2(x)[\mathcal{E}_y^{(s)}(x)]^2 \tag{6.38a}$$

$$\Delta\beta = \beta_s - \frac{l\pi}{\Lambda} = \beta_s - \beta_0 \tag{6.38b}$$

である。この周期凹凸導波路に左側から振幅 $R(0)$ の光が入射したときを考えると，$S(L) = 0$ の条件下での結合波方程式 (6.37a), (6.37b) の解は

$$S(z) = R(0)\frac{\kappa\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z}}{\mathrm{i}\Delta\beta\sinh\sigma L + \sigma\cosh\sigma L}\sinh[\sigma(z-L)] \tag{6.39a}$$

$$\begin{aligned}R(z) = R(0)&\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z}}{\mathrm{i}\Delta\beta\sinh\sigma L + \sigma\cosh\sigma L}\\ &\times\{-\mathrm{i}\Delta\beta\sinh[\sigma(z-L)] + \sigma\cosh[\sigma(z-L)]\}\end{aligned} \tag{6.39b}$$

となる。ここで，$\sigma = \sqrt{|\kappa|^2 - (\Delta\beta)^2}$ である。ちょうどブラッグ条件が満たされている場合（$\Delta\beta = 0$）には，

$$S(z) = R(0)\frac{\kappa}{|\kappa|}\frac{\sinh[\kappa(z-L)]}{\cosh\kappa L} \tag{6.40a}$$

$$R(z) = R(0)\frac{\cosh[\kappa(z-L)]}{\cosh\kappa L} \tag{6.40b}$$

となり，反射率が 1（透過率が 0）となることがわかる。[*22] この場合には前進波と後退波の間に効率のよい結合が生じているものの，光のエネルギーは導波路内に蓄えられないので共振器は形成されない。$\Delta\beta L \sim 0$ 付近の高反射率の領域を**ストップバンド (stop band)** とよぶ。[*23] それに対して，反射率が 0 になる $\Delta\beta L$ では，光のエネルギーが導波路内に蓄えられ，共振器が形成され，レーザ発振が可能となる。

次に，増幅媒質を導入してレーザ発振の条件を調べよう。導波路に利得 g がある場合には，結合波方程式は

$$S(z) = S'(z)\,\mathrm{e}^{-gz} \tag{6.41a}$$

$$R(z) = R'(z)\,\mathrm{e}^{gz} \tag{6.41b}$$

に対して

$$\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z} = \kappa R'\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(\Delta\beta+\mathrm{i}g)z} \tag{6.42a}$$

$$\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}z} = \kappa^* S'\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\Delta\beta+\mathrm{i}g)z} \tag{6.42b}$$

となる。上と同様に左側から振幅 $R(0)$ の光が入射したときを考えると，$S(L) = 0$ の条件下での解は

$$S(z) = R(0)\frac{-\kappa\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z}}{(g-\mathrm{i}\Delta\beta)\sinh\gamma L - \gamma\cosh\gamma L}\sinh[\gamma(z-L)] \tag{6.43a}$$

$$\begin{aligned} R(z) = R(0)&\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z}}{(g-\mathrm{i}\Delta\beta)\sinh\gamma L - \gamma\cosh\gamma L} \\ &\times\{-(g-\mathrm{i}\Delta\beta)\sinh[\gamma(z-L)] - \gamma\cosh[\gamma(z-L)]\} \end{aligned} \tag{6.43b}$$

となる。ここで，$\gamma = \sqrt{|\kappa|^2 + (g+\mathrm{i}\Delta\beta)^2}$ である。両式の分母が 0 となる，すなわち，

$$(g-\mathrm{i}\Delta\beta)\sinh\gamma L = \gamma\cosh\gamma L \tag{6.44}$$

が成り立つと，反射係数 $S(0)/R(0)$，透過係数 $R(L)/R(0)$ が無限大となる。すなわち，無限小の入力に対して有限の出力の得られる発振器として動作することになる。つまり，式 (6.44) は DFB レーザの発振条件である。これは，次のように書き換えることもできる。

$$\frac{\gamma-(g-\mathrm{i}\Delta\beta)}{\gamma+(g-\mathrm{i}\Delta\beta)}\mathrm{e}^{2\gamma L} = -1 \tag{6.45}$$

利得が十分に大きく，$g \gg \kappa$ の場合は，これはさらに

$$\frac{4(\gamma-\mathrm{i}\Delta\beta)^2}{\kappa^2}\mathrm{e}^{2\gamma L} = -1 \tag{6.46}$$

[*22] これを反射鏡として利用するのが**分布反射型 (distributed Bragg reflector, DBR) レーザ**である。

[*23] 最近では，フォトニック結晶との関連から，**禁制帯 (forbidden band)** とよばれることも多い。

と近似できる。この式の両辺の位相が等しいという条件から

$$2\tan^{-1}\frac{(\Delta\beta)_m}{g_m} - 2(\Delta\beta)_m L + \frac{(\Delta\beta)_m L\kappa^2}{g_m^2 + (\Delta\beta)_m^2} = (2m+1)\pi \tag{6.47}$$

が得られる。$g_m \gg (\Delta\beta)_m, \kappa$ では

$$(\Delta\beta)_m L \simeq -\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{6.48}$$

となる。すなわち，ブラッグ条件を満足する波長（ブラッグ波長）では発振は起きない。また，式 (6.46) の両辺の大きさが等しいことから，

$$\frac{e^{2g_m L}}{g_m^2 + (\Delta\beta)_m^2} = \frac{4}{\kappa^2} \tag{6.49}$$

が得られる。これが DFB レーザのしきい利得を与えることになる。$\Delta\beta$ が同じならばしきい利得は同じで，$\Delta\beta$ が大きくなるとしきい利得も大きくなることがわかる。DFB レーザの縦モードはブラッグ波長を中心に対称に分布し，ブラッグ条件に最も近い（ストップバンドに隣接する）$m = -1, 0$ の二つのモードが最低しきい利得となる。すなわち，一様回折格子を用いた DFB レーザでは何らかの非対称性を導入しない限り，単一縦モード動作を実現できない。

この問題を解決したレーザが**1/4波長シフト DFB レーザ**である。回折格子の中央に，回折格子の位相で π，光の位相で $\pi/2$，すなわち $\lambda/4$ だけ位相シフト領域を設けたものである。これによって，ブラッグ波長で共振器が構成され，レーザ発振が可能となる。1/4 波長シフト DFB レーザではブラッグ波長で最低しきい値が得られ，安定した単一縦モード発振が実現できる。

7　非線形光学デバイス

7.1　非線形光学とはなにか

強い外場が媒質に印加されたときにそれに対する応答が場の強さに比例しなくなる現象を非線形効果と呼ぶ。光領域での電気分極 $\boldsymbol{P}$ の電場 $\boldsymbol{E}$ に対する応答の非線形性に基づく効果を**非線形光学効果 (nonlinear optical effects)**，それを扱う学問を**非線形光学 (nonlinear optics)** という。非線形光学効果の例としては電気光学効果がもっとも古くから知られていたが，光電場に対する非線形応答という意味での現代的な非線形光学はレーザの出現によって初めて開かれた新しい分野である。

非線形光学効果は極めて多彩な現象として観測され，それらの多くが光エレクトロニクスやレーザ分光などの分野で活用されている。工学的に興味のあるものだけにしぼっても，高調波発生などの波長変換を利用した光記録や光情報処理・光通信，電気光学効果や非線形屈折率効果を用いた光スイッチ・光メモリー，光ソリトンの光通信への応用など，その応用の可能性は極めて広範囲におよぶ。また，非線形光学効果を利用した分光技術は今や物性研究の場では欠かせない測定手法となっている。

7.1.1　非線形性の起源

媒質の非線形光学応答を担うのは，線形応答の場合とまったく同様に原子や分子中の電子・原子核，固体中の価電子・自由電子・イオンなどである。媒質の線形光学応答は多くの場合，こうした電荷の調和振動の結果として理解することができる。古典的には，この調和振動子モデルに非調和性を持ち込むことで非線形光学応答を説明することが可能である。

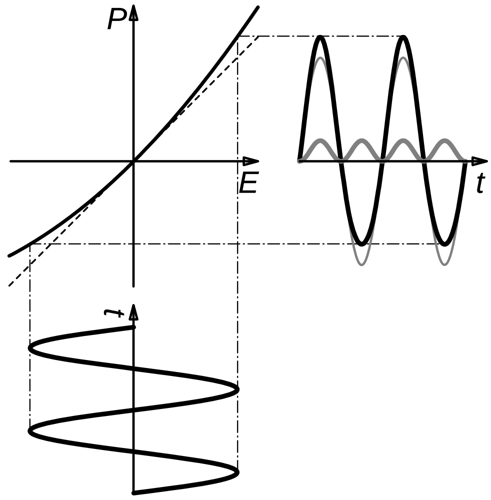

図 16　分極の非線形応答とそれに含まれる高調波成分。反転対称性を欠いた系では，分極が電場に対して非線形に応答することによって入射光電場の 2 倍の振動数で振動する第 2 高調波成分が生じる。

図16に示すように，媒質中の分極 $\boldsymbol{P}$ の外場 $\boldsymbol{E}$ に対する応答は外場が強くなると非線形性を呈するようになる。“非線形な” 分極には，入射光の電場の角振動数 ω と異なる角振動数を持つ成分（図では 2ω と 0）が含まれる。この**非線形分極 (nonlinear polarization)** は自身の持つ角振動数と同じ角振動数の光電場を放出する。これがまさに非線形光学過程の本質である。

分極の非線形成分が線形成分に比べて小さい場合には，以下のように分極を電場の関数として展開する近似が妥当となる。

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \cdots = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \ldots \right) \tag{7.1}$$

ここで，$\chi^{(1)}$ は**線形感受率 (linear susceptibility)**，$\chi^{(2)}, \chi^{(3)}, \ldots$ は**非線形感受率 (nonlinear susceptibility)** とよばれる。$\chi^{(2)}$ のような偶数次の非線形感受率は反転対称性を欠いた系でのみ生じる。$\chi^{(1)}$ は 1 のオーダーの大きさであるのに対して，$\chi^{(2)}$ は通常 10^{-11} m/V 程度，$\chi^{(3)}$ は 10^{-21} $\mathrm{m^2/V^2}$ 程度の大きさである。通常，非線形分極の大きさは極めて小さい。例えば，半導体レーザなどの CW 光源でも容易に得られる比較的弱い 10^6 V/m の光電場（10^5 $\mathrm{W/cm^2}$ のパワー密度に相当する）のもとで生じる 2 次の非線形分極 $P^{(2)}$ は線形分極 $P^{(1)}$ の 10^{-5} 倍程度，3 次の非線形分極 $P^{(3)}$ では 10^{-9} 倍程度にしかならない。波長変換では，2 次の非線形分極を利用するのだが，後述する位相整合条件下ではこのようにごく小さな非線形分極から発生する光電場が互いにコヒーレントに足し合わされることによって cm オーダーの伝搬距離で数十 % もの変換効率を得ることができる。

7.1.2　2 次非線形光学効果

式 (7.1) で電場の 2 乗に比例する項（$\chi^{(2)}$）で表される項）により生ずる効果を **2 次非線形光学効果 (second-order nonlinear optical effects, quadratic nonlinear optical effects)** という。ここで，角振動数 ω の単色光 $E(t) = E\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) = \frac{1}{2}(E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{c.c.})$ が非線形媒質に入射した場合を考える。この時に生じる 2 次の非線形分極

$$P^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2(t) \tag{7.2}$$

は以下の式で与えられる。

$$P^{(2)}(t) = \epsilon_0\chi^{(2)}\left[\frac{1}{4}(E^2 e^{2i\omega t} + \text{c.c.}) + \frac{1}{2}EE^*\right] \tag{7.3}$$

角振動数 2ω で振動する第 1 項が**第 2 高調波発生 (second-harmonic generation: SHG)** に寄与する。また，第 2 項は振動しない成分で，これは非線形媒質中に静電場を発生させる**光整流 (optical rectification: OR)** に相当する。

非線形媒質に静電場 E_0 を印加してそこへ角振動数 ω の単色光を入射した場合を考えよう。この時の入射電場 $E(t) = E_1\cos(\omega t) + E_0 = \mathrm{Re}(E_1 e^{i\omega t}) + E_0$ に対する 2 次非線形分極は次のようになる。

$$P^{(2)}(t) = \epsilon_0\chi^{(2)}\left[\frac{1}{4}(E_1^2 e^{2i\omega t} + \text{c.c.}) + \left(\frac{1}{2}E_1E_1^* + E_0^2\right) + (E_0E_1 e^{i\omega t} + \text{c.c.})\right] \tag{7.4}$$

ここには入射光と同じ角振動数 ω の成分が含まれている。これが**線形電気光学効果 (linear electro-optic effect)**，あるいは**ポッケルス効果**とよばれる現象を引き起こす。これは静電場に比例した屈折率の変化をもたらすので，電気-光スイッチに用いられる。

次に，角振動数 ω_1 と ω_2 の 2 つの光 $E(t) = E_1\cos(\omega_1 t) + E_2\cos(\omega_2 t) = \mathrm{Re}(E_1 e^{i\omega_1 t} + E_2 e^{i\omega_2 t})$ が非線形媒質に入射した場合を考える。この場合の 2 次非線形分極は

$$\begin{aligned} P^{(2)}(t) = \epsilon_0\chi^{(2)}\Bigg[&\left(\frac{1}{4}E_1^2 e^{2i\omega_1 t} + \frac{1}{4}E_2^2 e^{2i\omega_2 t} + \text{c.c.}\right) + \left(\frac{1}{2}E_1E_1^* + \frac{1}{2}E_2E_2^*\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2}E_1E_2 e^{i(\omega_1+\omega_2)t} + \frac{1}{2}E_1E_2^* e^{i(\omega_1-\omega_2)t} + \text{c.c.}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{7.5}$$

となり，角振動数 $2\omega_1, 2\omega_2$ の第 2 高調波成分と角振動数 0 の静電場に加えて，角振動数 $\omega_1 + \omega_2$ の**和周波発生 (sum-frequency generation: SFG)** と角振動数 $|\omega_1 - \omega_2|$ の**差周波発生 (difference-frequency generation: DFG)** に寄与する成分が現れる。SHG・SFG・DFG・はいずれもレーザ光の波長変換の手段として広く利用されている。また，DFG 過程を利用した**光パラメトリック発生 (optical parametric generation: OPG)**・**光パラメトリック増幅 (optical parametric amplification: OPA)**・**光パラメトリック発振 (optical parametric oscillation: OPO)** は波長可変なコヒーレント光源に活用されている。

7.1.3　3 次非線形光学効果

式 (7.1) で電場の 3 乗に比例する項（$\chi^{(3)}$）で表される項）により生ずる効果を **3 次非線形光学効果 (third-order nonlinear optical effects, cubic nonlinear optical effects)** という。

角振動数 ω の単色光 $E(t) = E\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(E e^{i\omega t})$ が非線形媒質に入射した場合に生じる 3 次の非線形分極

$$P^{(3)}(t) = \epsilon_0\chi^{(3)}E^3(t) \tag{7.6}$$

は以下の式で与えられる。

$$P^{(3)}(t) = \epsilon_0\chi^{(3)}\left[\frac{1}{8}(E^3 e^{3i\omega t} + \text{c.c.}) + \frac{3}{8}(E^2E^* e^{i\omega t} + \text{c.c.})\right] \tag{7.7}$$

角振動数 3ω で振動する第 1 項が**第 3 高調波発生 (third-harmonic generation: THG)** に寄与する。第 2 項は入射光と同じ角振動数 ω の光を放出し，これが線形分極から放射された光とコヒーレントに重ね合わされた場合には光強度 ($I \propto EE^*$) に比例した屈折率変化が誘起される。この効果

を**非線形屈折率 (nonlinear refracteve index, intensity-dependent refractive index)** 効果，あるいは**光カー (optical Kerr)** 効果という。また，$\chi^{(3)}$ が複素数ならば，この第 2 項の虚部は **2 光子吸収 (two-photon absorption: TPA)** に寄与することになる。一方，この非線形分極から放射される光が線形分極からの光と分離してとり出される場合には，この項は**縮退四光波混合 (degenerate four-wave mixing: DFWM)** に寄与することになる。

非線形屈折率は工学上，最も重要な非線形光学効果である。後に述べるように，非線形屈折率は**自己収束 (self focusing)**，**自己位相変調 (self-phase modulation)**，**位相共役光 (phase-conjugated wave)** の発生などに寄与する。また，非線形屈折率を利用することで全光スイッチや光演算素子などの光デバイスを構築することができる。

次に静電場 E_0 を印可した非線形媒質に角振動数 ω の単色光 $E(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) = \mathrm{Re}(E_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t})$ が入射した場合について考えよう。この時の 3 次非線形分極は

$$
\begin{aligned}
P^{(3)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} \Biggl[& \left(\frac{1}{8} E_1^3 \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega_1 t} + \frac{3}{8} E_1^2 E_1^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t} + \mathrm{c.c.} \right) + E_0^3 \\
& + \left(\frac{3}{4} E_1^2 E_0 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_1 t} + \mathrm{c.c.} \right) + \left(\frac{3}{2} E_1 E_0^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t} + \mathrm{c.c.} \right) \Biggr]
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

となる。角振動数 2ω の第 3 項が**電場誘起第 2 高調波発生 (electric-field-induced second-harmonic generation: EFISH)** を，角振動数 ω の第 4 項が **2 次電気光学効果**，あるいは **DC カー (Kerr) 効果**を引き起こす。DC カー効果は高速の電気-光シャッタに広く用いられている。

角振動数 ω_1, ω_2 と ω_3 の 3 つの光 $E(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t) + E_3 \cos(\omega_3 t) = \mathrm{Re}(E_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t} + E_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t} + E_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_3 t})$ が非線形媒質に入射した場合には以下に挙げる角振動数の成分の非線形分極が生ずる。

$$
\begin{gathered}
\omega_1, \omega_2, \omega_3, |\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3|, |\omega_1 \pm \omega_2 \mp \omega_3|, \\
|2\omega_1 \pm \omega_2|, |2\omega_1 \pm \omega_3|, |2\omega_2 \pm \omega_1|, |2\omega_2 \pm \omega_3|, |2\omega_3 \pm \omega_1|, |2\omega_3 \pm \omega_2|
\end{gathered}
$$

角振動数 $|\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3|, |\omega_1 \pm \omega_2 \mp \omega_3|,$ の項は一般的に**四光波混合 (four-wave mixing: FWM)** 過程とよばれる。また，角振動数 ω_i のうち，2 色の光を用いている部分（例えば $\omega_2 = \omega_1 - \omega_1 + \omega_2$）の寄与は（2 光束）光カー効果や**相互位相変調 (cross-phase modulation)**，**誘導ラマン散乱 (stimulated Raman scattering: SRS)**，**誘導ブリリュアン散乱 (stimulated Brillouin scattering: SBS)** などとして観測される。さらに，角振動数 $2\omega_2 - \omega_1$ などの成分は**コヒーレント反ストークスラマン散乱 (coherent anti-Stokes Raman scattering: CARS)** で重要な役割を果たす。

7.2 2 次非線形光学定数

第 2 高調波発生に関しては特別に

$$
d = \frac{1}{2} \chi^{(2)}(-2\omega; \omega, \omega) \tag{7.9}
$$

で定義される**非線形光学定数 (nonlinear optical coefficient)** を用いることが多い。d_{ijk} は $\chi^{(2)}_{ijk}$ と同じく $3 \times 3 \times 3$ の 3 階のテンソル量であるが，通常はその対称性 ($d_{ijk} = d_{ikj}$) を利用して次の規則に従って 3×6 の行列形式に縮約して表示する。

jk	xx	yy	zz	yz,zy	zx,xz	xy,yx
l	1	2	3	4	5	6

縮約表示した非線形光学定数 d_{il} を用いると，第 2 高調波の非線形分極は

$$\begin{pmatrix} (P^{(2)}_{2\omega})_x \\ (P^{(2)}_{2\omega})_y \\ (P^{(2)}_{2\omega})_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (E_\omega)_x^2 \\ (E_\omega)_y^2 \\ (E_\omega)_z^2 \\ 2(E_\omega)_y(E_\omega)_z \\ 2(E_\omega)_z(E_\omega)_x \\ 2(E_\omega)_x(E_\omega)_y \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

と書き下すことができる。また，第 2 高調波発生以外の 2 次非線形光学過程についてもこの非線形光学定数の定義を拡張して，

$$d(-\omega_1 - \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} \chi^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2; \omega_1, \omega_2) \tag{7.11}$$

を用いて

$$\boldsymbol{P}^{(2)}_{\omega_1+\omega_2} = 2\epsilon_0\, g\, d(-\omega_1 - \omega_2; \omega_1, \omega_2) : \boldsymbol{E}_{\omega_1} \boldsymbol{E}_{\omega_2} \tag{7.12}$$

とする場合もある。

7.3 非線形媒質中の光波の伝搬

7.3.1 結合波方程式

媒質中に非線形分極が誘起されると，これから非線形分極と同じ振動数の新たな光波が放出される。この光波の伝搬を記述するためには，非線形分極を強制振動項として取り込んだマクスウェル方程式を解く必要がある。出発点となるマクスウェル方程式は

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}(t)}{\partial t} \tag{7.13a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{D}(t)}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(t)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{P}(t)}{\partial t} \tag{7.13b}$$

である。式 (7.13a) に $\nabla\times$ を作用させて，式 (7.13b) に $\partial/\partial t$ をとったものを代入すると

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E}(t) = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{P}(t) \tag{7.14}$$

が得られる。この式は線形の偏微分方程式なので，電場と分極のフーリエ成分に対する式に展開することができ，

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}(\omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{E}(\omega) = \omega^2 \mu_0 \boldsymbol{P}(\omega) \tag{7.15}$$

となる。ここで分極 $\boldsymbol{P}$ を線形分極 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}$ と非線形分極 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}$ に分離して整理しなおすと，

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}(\omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \cdot \boldsymbol{E}(\omega) = \omega^2 \mu_0 \boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}(\omega) \tag{7.16}$$

と書ける。ここで，$\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(-\omega; \omega)$ は比誘電率テンソルである。n 種類の振動数成分を含む非線形光学過程による光波の伝搬は，n 個の式 (7.16) からなる連立方程式の解として得られることになる。一般に，右辺の非線形分極は他の振動数成分の電場の関数となっており，この連立方程式は一組の**結合波 (Coupled Wave) 方程式**を構成する。

7.3.2　ゆるやかな振幅変化の近似

ここで簡単のために，等方的な媒質中を電場と非線形分極がともに z 方向に波数 $k = \frac{n\omega}{c}$ で平面波として伝搬する場合について考えてみよう。

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_\omega(z)\exp(\mathrm{i}kz) \tag{7.17}$$

を式 (7.16) に代入して整理すると

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\boldsymbol{E}}_\omega}{\partial z^2} + 2\mathrm{i}k\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{E}}_\omega}{\partial z} = -\omega^2\mu_0\boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}(\omega)\exp(-\mathrm{i}kz) \tag{7.18}$$

が得られる。ここで，

$$\left|\frac{\partial^2 \widetilde{\boldsymbol{E}}_\omega}{\partial z^2}\right| \ll \left|k\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{E}}_\omega}{\partial z}\right| \tag{7.19}$$

が成り立てば，式 (7.18) は次のように単純な 1 次の偏微分方程式に帰着する。

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{E}}_\omega}{\partial z} = \frac{\mathrm{i}\omega^2\mu_0}{2k}\boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}(\omega)\exp(-\mathrm{i}kz) \tag{7.20}$$

式 (7.19) の解釈から，この近似はしばしば**ゆるやかな振幅変化 (SVA: Slowly Varying Amplitude) の近似**と呼ばれ，多くの場合よい近似となっている。（厳密には，この近似は反対方向に伝搬する進行波を無視することと等価である。）

7.3.3　位相整合

もっとも単純な非線形光学過程の一例として定常状態での光第 2 高調波発生 (SHG) について考えよう。第 2 高調波成分（振動数 2ω）の非線形分極は $P^{\mathrm{NL}}(2\omega) = \epsilon_0 d\tilde{E}_\omega^2\exp(2\mathrm{i}k_\omega z)$ で与えられるので，SVA 近似のもとでの結合波方程式の 2ω 成分は

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{E}_{2\omega}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{i}\omega}{n^{2\omega}c}d\tilde{E}_\omega^2\exp(-\mathrm{i}\Delta kz) \tag{7.21}$$

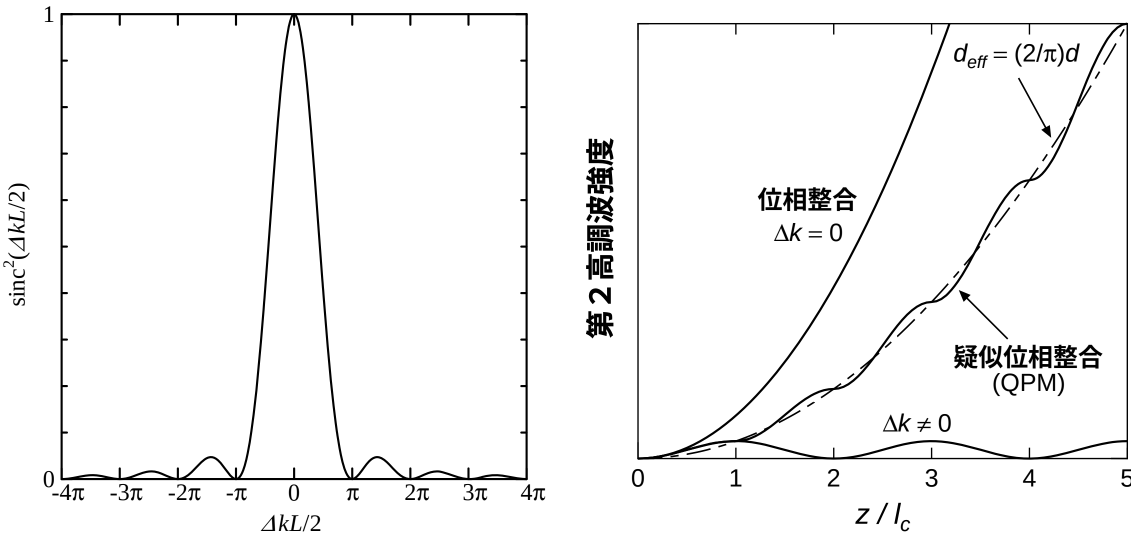

図 17　第 2 高調波強度の Δk 依存性（左図）と相互作用長依存性（右図）

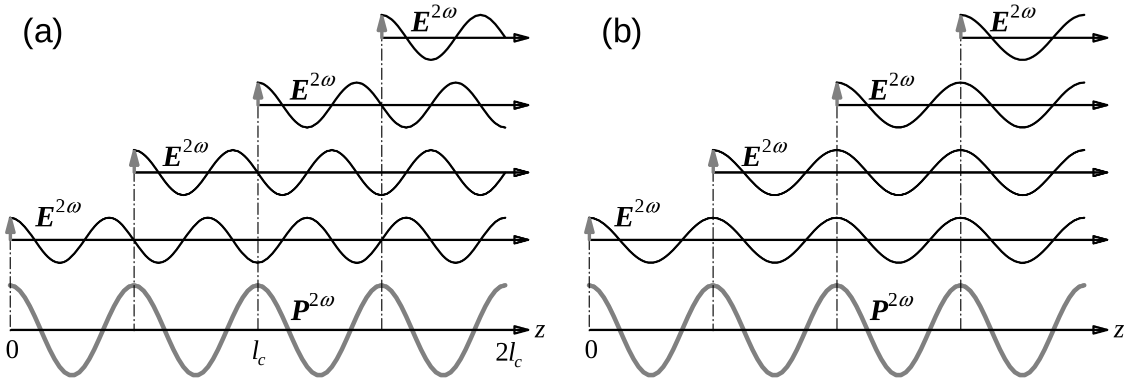

図 18　位相整合の概念図。(a) 位相整合がとれていない場合には，各点の非線形分極から発生した第 2 高調波の位相がそろわず，$z = 2l_c$ ではそれらが足し合わされて出力が 0 となる。(b) 位相整合が達成されている場合は各点の非線形分極から発生した第 2 高調波の位相がそろう。

となる。ここで，$\Delta k = k_{2\omega} - 2k_\omega = (2\omega/c)(n_{2\omega} - n_\omega)$ は基本波（振動数 ω）と第 2 高調波（振動数 2ω）の間の**波数不整合 (wavevector mismatch)** である。吸収がなく，波長変換による基本波の減衰も無視できるとすると，$\tilde{E}_\omega$ は一定値となるので，この式は簡単に積分できて

$$I_{2\omega}(z) = \frac{\epsilon_0 n^{2\omega} c}{2}|E_{2\omega}(z)|^2 = \frac{2\omega^2}{\epsilon_0 c^3}\frac{d^2}{(n^\omega)^2 n^{2\omega}} I_\omega^2 z^2 \frac{\sin^2(\Delta kz/2)}{(\Delta kz/2)^2} \tag{7.22}$$

となる。

第 2 高調波への変換効率は sinc 関数 $\mathrm{sinc}(\Delta kz/2) \equiv \frac{\sin(\Delta kz/2)}{(\Delta kz/2)}$ の値に強く依存する。第 2 高調波強度の Δk 依存性を**図17**に示す。$\Delta k \neq 0$ の時には第 2 高調波出力は $2\pi/\Delta k$ を周期として振動する。この周期の半分 $l_c = \pi/|\Delta k| = \lambda_\omega/4|n^{2\omega} - n^\omega|$ を**コヒーレンス長 coherence length)** と呼ぶ。$\Delta k = 0$ の時にはコヒーレンス長が無限大となり，第 2 高調波強度は相互作用長の 2 乗に比例して増大する。これは，**図18**に示すように，非線形分極波から発生した第 2 高調波が位相をそろえて足し合わされるためで，この状態を**位相整合 (phase matching)** がとれているという。位相整合条件は光子の運動量保存則に対応する。

光高調波発生や光パラメトリック過程では一般には位相整合条件は満足されておらず，位相整合の可否が極めて重要となる。位相整合を達成するための種々の方法については次の節で詳しく述べる。それに対して，電気光学効果や非線形屈折率，2 光子吸収，縮退四光波混合，誘導散乱などでは自動的に位相整合が達成されている。

7.4　2 次非線形光学効果の応用

7.4.1　波長変換

2 次の非線形光学効果による光第 2 高調波発生 (SHG)，和周波発生 (SFG)，差周波発生 (DFG)，光パラメトリック増幅・発振 (OPA, OPO) は，レーザ光の波長変換の手段として極めて重要な役割をはたす。固体の吸収が問題となる VUV 領域を除いて，実用的な波長変換素子はすべて結晶材料を非線形媒質として用いている。3 次以上の高調波の発生にも，SHG と SFG とが組み合わされて利用される。例えば，第 3 高調波（振動数 3ω）を得るためには，基本波光（振動数 ω）と SHG 光（振動数 2ω）の SFG が使われている。$\chi^{(3)}$ を用いた第 3 高調波発生よりもはるかに変換効率が高いからである。

まず最初に，波長変換効率を高くするにはどうしたらよいかをまとめておこう。基本波がビーム断面積 A の均一な光強度分布をしている場合（トータルパワー $\mathscr{P}_\omega = AI_\omega$）の光第 2 高調波発生 (SHG) のパワー変換効率は式 (7.22) から

$$\eta = \frac{\mathscr{P}_{2\omega}(L)}{\mathscr{P}_\omega} = \frac{2\omega^2}{\epsilon_0 c^3} \frac{d_{\mathrm{eff}}^2}{(n^\omega)^2 n^{2\omega}} \frac{\mathscr{P}_\omega}{A} L^2 \frac{\sin^2(\Delta kL/2)}{(\Delta kL/2)^2} \tag{7.23}$$

となる。変換効率を高めるためには，1)$\Delta k = 0$ すなわち位相整合を達成する，2) d_{eff}^2/n^3（**性能指数 (figure of merit)** と呼ばれる）の大きな非線形光学材料を用いる，3) 基本波ビームを集光することによって基本波パワー密度 ($\mathscr{P}_\omega/A$) を上げ，4) 長い相互作用長 (L) を確保することが必要であることがわかる。

■位相整合の達成法　高い変換効率を得るためには位相整合を達成することが不可欠である。SHG の場合では，$\Delta k = (2\omega/c)(n^{2\omega} - n^\omega) = 0$ を満たす必要がある。一般には屈折率の波長分散のために $n^{2\omega} \neq n^\omega$ なので，位相整合を達成するためには特別な工夫が必要となる。

複屈折位相整合　もっとも一般的な方法は媒質の**複屈折性 (birefringence)** を利用するものである。常光線に対する屈折率 n_o と異常光線に対する屈折率 n_e との差を利用して波長分散を補償するのである。ここで，異方性媒質中での光の伝搬についてまとめておく。

異方性媒質中では，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{D}$ は平行でなくなる。この場合には，誘電率は以下のように 2 階のテンソルであるとしなければならない。

$$D_i = \epsilon_0 \sum_j (\epsilon_r)_{ij} E_j \tag{7.24}$$

この比誘電率テンソル ϵ_r は適当な直交座標系を選べば対角化することができる。

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{7.25}$$

この時の座標軸 x, y, z を誘電主軸，あるいは光学軸という。等方性媒質では $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = n^2$ である。これに対して $\epsilon_x = \epsilon_y (= n_o^2) \neq \epsilon_z (= n_e^2)$ となる媒質を**一軸性**あるいは**単軸性 (uniaxial)**，$\epsilon_x (= n_x^2) \neq \epsilon_y (= n_y^2) \neq \epsilon_z (= n_z^2)$ となる媒質を**二軸性 (biaxial)** という。異方性媒質中では，一般に，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$（等位相面に垂直）はポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$（ビームの進む方向）と平行でない。任意の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を有する直線偏光の平面波が直線偏光のまま伝搬するためには，その光はある特定の方向に偏光していなければならない。これを固有モードとよぶ。固有モードは常に二種類あり，その二つの偏光は互いに直交している。さらに，その二つの直線偏光に対する屈折率は一般に互いに異なっている。一軸性媒質の場合には，それぞれに対する屈折率は

$$n = n_o \tag{7.26a}$$

$$n = n_e(\theta) = \left(\frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} \right)^{-1/2} \tag{7.26b}$$

となる。ここで，θ は波数ベクトルと z 軸の間の角である。前者の屈折率を感じて伝搬する光を**常光線 (ordinary ray)**，後者の屈折率を感じて伝搬する光を**異常光線 (extraordinary ray)** とよぶ。任意の方向 $\boldsymbol{k}$ に伝搬する光に対して固有モードの屈折率と偏光方向を探す作業は**屈折率楕円体 (index ellipsoid)** を用いて簡単におこなえる。屈折率楕円体とはその主値が n_x, n_y, n_z に等しい楕円体

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \tag{7.27}$$

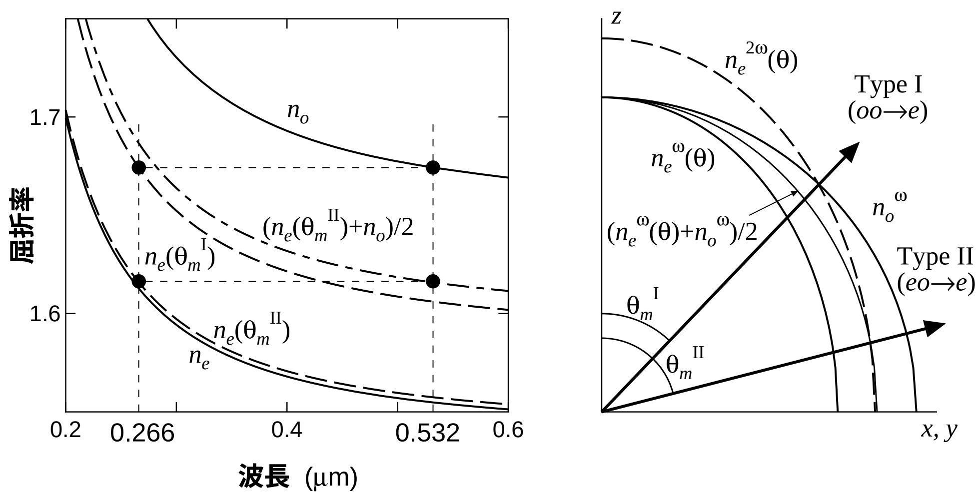

図 19　BBO における位相整合。Nd:YAG レーザの第 4 高調波発生（532 nm から 266 nm への SHG）ではタイプ I とタイプ II の位相整合が可能である。右の屈折率面の図では異方性を誇張している。

である。$\boldsymbol{k}$ に垂直で原点を通る面で屈折率楕円体を切断して得られる楕円の二つの主値が二つの固有モードの屈折率で，それに対応する $\boldsymbol{D}$ はその主軸の方向である。一軸性媒質では xy 平面内に偏光した光は常に常光線として伝搬し，それに垂直な偏光の光は異常光線となる。また，与えられた波数 $\boldsymbol{k}$ の方向に対応する二つの屈折率を動径方向にプロットしたものを（法線）屈折率面とよび，以下の位相整合の説明でよく用いられる。

負の単軸結晶 ($n_o > n_e$) である β-BaB_2O_4 (BBO) を例にとると，**図19**のように 2 通りの方法で位相整合可能である。ひとつは，2 つの入射基本波（SHG の場合にはどちらも振動数 ω）を常光線とし，異常光線の第 2 高調波との組み合わせ（$oo \to e$）で位相整合をとるものである。このように 2 つの入射光をともに常光線（正の単軸結晶 ($n_o < n_e$) の場合は異常光線）にとる方法をタイプ I の位相整合と呼ぶ。このときの位相整合条件は

$$n_e^{2\omega}(\theta_{\mathrm{m}}^{\mathrm{I}}) = n_o^{\omega} \qquad \text{（正の単軸結晶では}\quad n_o^{2\omega} = n_e^{\omega}(\theta_{\mathrm{m}}^{\mathrm{I}})\text{）} \tag{7.28}$$

である。これに対して，2 つの入射基本波の一方を常光線，もう一方を異常光線とするのがタイプ II の位相整合である。位相整合条件は

$$n_e^{2\omega}(\theta_{\mathrm{m}}^{\mathrm{II}}) = \frac{1}{2}(n_e^{\omega}(\theta_{\mathrm{m}}^{\mathrm{II}}) + n_o^{\omega}) \quad \text{（正の単軸結晶では}\quad n_o^{2\omega} = \frac{1}{2}(n_e^{\omega}(\theta_{\mathrm{m}}^{\mathrm{II}}) + n_o^{\omega})\text{）} \tag{7.29}$$

となる。

異常光線ではその波数ベクトルとポインティングベクトルの方向が異なるので，複屈折を利用した位相整合では非線形分極波とそれから放射される第 2 高調波のビームがずれてきてしまう。この**ウォークオフ (walk-off)** 効果のために実効的な相互作用長が制限されてしまい，効率の低下を招く原因となる。また，一般に，わずかな角度のずれが大きな位相不整合をもたらすので，集光したビームなどではごく一部の角度成分の基本波だけしか有効に利用できなくなってしまう。こうした問題を解決するのが**非臨界位相整合 (NCPM: noncritical phase matching)** である。基本波・第 2 高調波の伝搬方向を誘電主軸に平行にとって位相整合が達成できれば，ウォークオフはゼロとなり，同時に位相整合許容幅を格段に広くすることができる。しかしながら，NCPM が可能な非線形光学結晶の数は極めて限られており，しかも，通常は NCPM は温度同調が不可欠である.

非線形過程に関る光波の伝搬方向が非線形媒質の主軸からずれている場合には，様々なテンソル要素が同時にその過程に寄与することになる。媒質の主軸を X, Y, Z，光波の伝搬方向と偏光方向に対して定義される実験室系を x, y, z とすると

$$(P^{(2)}_{\omega_1+\omega_2})_i = 2\epsilon_0 g \sum_{j,k=x}^{z} d_{\mathrm{eff}}(E_{\omega_1})_j(E_{\omega_2})_k \tag{7.30a}$$

$$d_{\mathrm{eff}} = \sum_{I,J,K=X}^{Z} (\hat{i}\cdot\hat{I})(\hat{j}\cdot\hat{J})(\hat{k}\cdot\hat{K})\, d_{IJK}(-\omega_1-\omega_2;\omega_1,\omega_2) \tag{7.30b}$$

と書ける（$(\hat{i}\cdot\hat{I})$ は単位ベクトル $\hat{i}$ と $\hat{I}$ 間の方向余弦)。ここで定義される d_{eff} を**実効非線形光学定数 (effective nonlinear-optical coefficient)** と呼ぶ。実験室系は位相整合条件（すなわち屈折率の異方性と波長分散）だけで決められてしまうので，実効非線形光学定数が大きく取れるかどうかは使用する非線形光学結晶と波長によって決定されることになり，これが，実用に供せられる非線形光学結晶の選択をさらに難しくしている。

疑似位相整合 (QPM)　等方性媒質では，当然のことながら，上述の複屈折による位相整合法は利用できない。また，媒質のもっとも大きな非線形光学定数要素を利用できるとも限らないことや，ウォークオフなどの欠点もある。こうした複屈折位相整合の不自由さを回避する巧妙な方法が**疑似位相整合 (QPM: quasi phase matching)** である。位相整合のとれていない媒質をコヒーレンス長ごとのセグメントに区切り，その非線形光学定数の符号を交互に反転させせることによって QPM が達成できる。

$$\begin{aligned} d_m(z) = (-1)^{m-1}d &= \sum_{n=\mathrm{odd}} \frac{4d}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{l_c}z\right) \\ &= -\mathrm{i}\sum_{n=\mathrm{odd}} \frac{2d}{n\pi}[\exp(n\mathrm{i}\Delta kz) - \exp(-n\mathrm{i}\Delta kz)] \end{aligned} \tag{7.31}$$

ここで，d_m は m 番目のセグメント中の非線形光学定数を表す。**図20**に示したように，疑似位相整合では，非線形分極と出力光電場の間の位相差を巧みに調節することによって出力光強度が単調に増加するようにしているのである。このときの第 2 高調波の複素振幅は

$$E_{2\omega,m}(z) = -\frac{2\omega}{n^{2\omega}c\Delta k}dE_\omega^2\left\{m-1-\mathrm{i}^m\exp\left(\mathrm{i}\frac{\Delta kz}{2}\right)\sin\left[\frac{\Delta kz}{2}+(m-1)\frac{\pi}{2}\right]\right\} \tag{7.32}$$

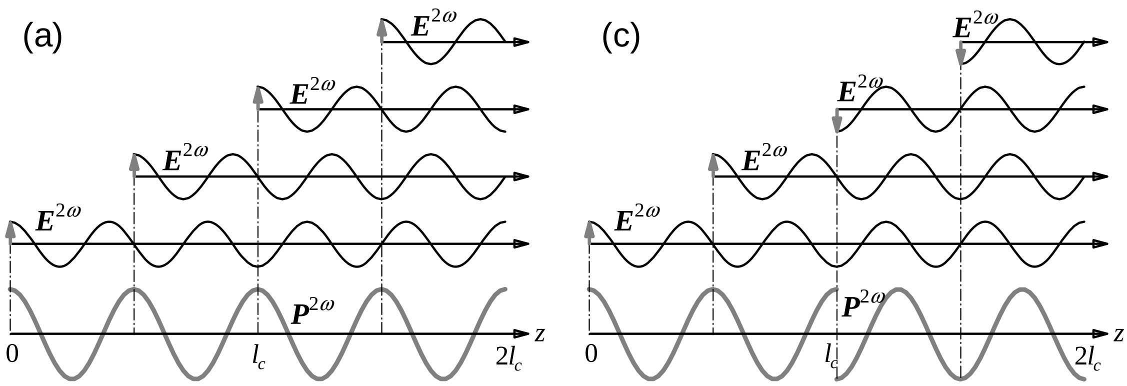

図 20　疑似位相整合の概念図。(a) 位相整合がとれていない場合には，各点の非線形分極から発生した第 2 高調波の位相がそろわず，$z = 2l_c$ ではそれらが足し合わされて出力が 0 となる。(c) $l_c \le z < 2l_c$ の部分で非線形光学定数の符合を反転させせると第 2 高調波の位相をある程度そろえることができる（疑似位相整合)。

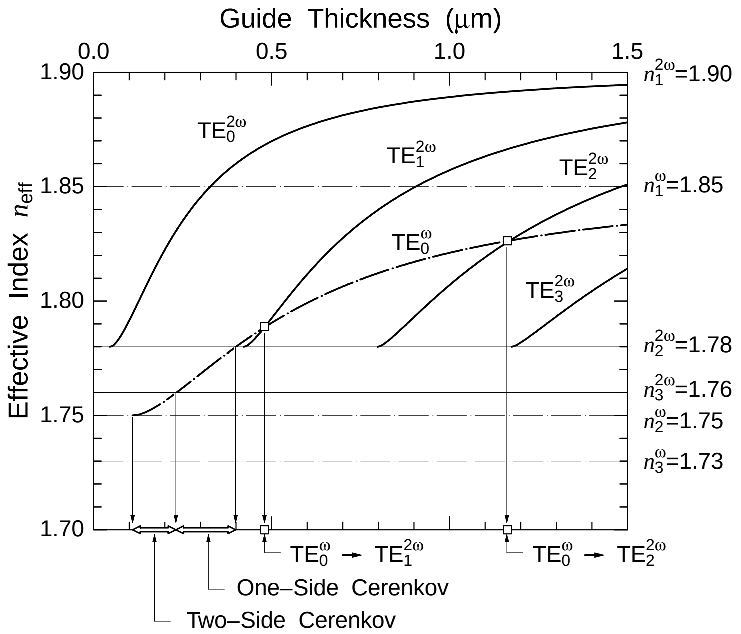

図 21　3 層スラブ導波路のモード分散曲線の一例（基本波波長 1.0 μm での計算値）。$TE_0^{\omega} \to TE_1^{2\omega}$・$TE_0^{\omega} \to TE_2^{2\omega}$ の導波-導波型と，片面・両面のチェレンコフ放射型の位相整合が可能である。

で与えられる。QPM の場合の出力第 2 高調波強度の相互作用長依存性を**図17**に示す。式 (7.31) のフーリエ級数展開の係数からすぐにわかるように，QPM の出力は $d_{\mathrm{eff}} = (2/\pi)d$ とした位相整合時の出力で近似できる。

QPM は屈折率の分散と異方性という材料定数の呪縛から非線形光学結晶を解放した画期的な方法といえる。これによって，原理的には任意の波長で望みの非線形光学定数成分を利用してウォークオフのない波長変換を実現することができる。QPM の成否は，非線形光学定数の符合を反転させるために結晶の空間反転が実現できるか否かにかかっている。後述する $LiNbO_3$ では周期分極反転ポーリングの技術の進展に伴い，QPM 波長変換デバイスが驚異的な成功を収めている。

導波路のモード分散　光波をその波長程度のサイズの空間に閉じ込めて伝搬させる光導波路では，光波の実効的な位相速度が導波路のサイズに依存するようになる。また，導波路中に閉じ込められた光波の固有モード（導波モード）は閉じ込め方向の定在波条件から離散化され，異なった位相速度を持った複数の導波モードが同時に存在する。この特性（モード分散）を利用して位相整合を達成することが可能である。この場合の位相整合条件は

$$\Delta\beta_{mn} = \beta_m^{2\omega} - 2\beta_n^{\omega} = \frac{2\omega}{c}\left(n_{\mathrm{eff},m}^{2\omega} - n_{\mathrm{eff},n}^{\omega}\right) = 0 \tag{7.33}$$

である。ここで，β_n^{ω}（$\beta_m^{2\omega}$）は基本波（第 2 高調波）の n（m）次導波モードの伝搬定数，n_{eff} は等価屈折率である。3 層スラブ導波路におけるモード分散曲線の一例を**図21**に示す（簡単のために TE モードのみ示し，TM モードは省略した）。第 2 高調波導波モード ($TE_1^{2\omega}$・$TE_2^{2\omega}$) を利用した**導波-導波型**位相整合と第 2 高調波放射モード（基板放射モードと基板・クラッド放射モード）を利用した**チェレンコフ放射型**位相整合が可能であることがわかる。

導波モードを用いることで位相整合条件は著しく緩和されたかのように思えるが，実はそうではない。高効率化を実現するためには，あとで見るように，伝搬方向に垂直な方向での位相整合（重なり

表 2　おもな非線形光学結晶の特性

非線形光学結晶	$LiNbO_3$ (LN)	$LiTaO_3$ (LT)	$KTiOPO_4$ (KTP)	β-BaB_2O_4 (BBO)	$CsLiB_6O_{10}$ (CLBO)	α-SiO_2 (Quartz)	GaAs
点群	$3m$	$3m$	$mm2$	$3m$	$\bar{4}2m$	32	$\bar{4}3m$
透明波長域 [μm]	0.34–4.5	0.3–4.5	0.35–4.5	0.19–3.3	0.18–2.7	0.16–3	0.87–14
非線形光学定数 [pm/V][a]	$d_{33} = 25$ $d_{31} = 4.6$	$d_{33} = 14$ $d_{31} = 0.85$	$d_{33} = 15$ $d_{31} = 3.7$ $d_{32} = 2.2$	$d_{22} = 2.2$ $d_{31} = 0.04$	$d_{36} = 0.74$	$d_{11} = 0.30$	$d_{36} = 170$[b]
位相整合法	複屈折・QPM	QPM	複屈折・QPM	複屈折	複屈折	QPM	QPM

[a] 基本波波長 1.064 μm での値
[b] 第 2 高調波波長 0.532 μm は完全に吸収帯に入っているので比較には注意が必要

積分の最適化）が必要なのである。

■波長変換用非線形光学結晶　高い変換効率を得るためには位相整合可能な材料の選定がもっとも重要であるが，それだけでなく，実効非線形光学定数の大きな材料を用いる必要がある。また，当然であるが，使用する波長で透明な材料を選ばねばならない。これらの条件を満足する非線形光学材料は実はあまり多くはない。代表的な非線形光学結晶の特性を**表2**にまとめた。

$LiNbO_3$ (LN) は周期分極反転の技術が極度に発達してきており，周期分極反転結晶 (periodically-poled LN, PPLN) が既に製品化されている。また，PPLN を近赤外半導体レーザと組み合わせた青色 QPM-SHG 光源がデジタルプリントシステムなどに組み込まれて実用化されている。PPLN は固体レーザと組み合わせた OPO にも利用されつつある一方で，光通信への応用なども検討されており，可視から赤外域の領域で広く用いられる優れた非線形光学結晶である。$LiTaO_3$ (LT) は LN よりも短波長側まで透明なため，紫色・紫外光への波長変換に極めて有望である。最近になって優れた特性を有する定組成比 LT 結晶の育成が可能となり，研究開発の急速な進展が期待される。$KTiOPO_4$ (KTP) は Nd:YAG レーザ Nd:YVO_4 の複屈折位相整合 SHG で極めて優れた特性を示し，上述のデジタルプリントシステムには半導体レーザ励起 Nd:YVO_4 レーザと KTP を組み合わせた緑色光源が使用されている。また，赤外域の OPO にも利用されているほか，PPKTP の品質が向上してきており QPM デバイスとしての利用も今後広がるかもしれない。β-BaB_2O_4 (BBO) は紫外透過性に優れた結晶で，Nd:YAG レーザの第 3・第 4 高調波や Ar レーザの第 2 高調波などの紫外光の発生に用いられ，次世代半導体プロセスの露光用光源として期待されている。また，ハイパワーレーザ光源と組み合わせた OPO・OPA・OPG として可視・近赤外域の波長可変光源としても広く用いられている。$CsLiB_6O_{10}$ (CLBO) は BBO よりもさらに吸収短波長が短いという際立った特徴を持つ非線形光学結晶で，比較的大型の結晶成長が可能であることもあって，一部で BBO に取って代わりつつある。

ここでは，現状で実用にはなっていないものの，今後大きく発展する可能性のある波長変換用結晶として，α-SiO_2 (Quartz) と GaAs について触れておきたい。Quartz は古くから知られた非線形光学結晶の一つであるが，実用的な波長変換用結晶とはみなされてこなかった。しかしながら，最近になってツインを制御して周期反転構造を実現できる可能性があることが示された。極めて高い光損傷しきい値を活かした超高出力可視・紫外光の発生や，優れた紫外光透過性を利用した真空紫外光発生などへの応用が期待される。GaAs に代表されるⅢ-V 族化合物半導体は，極めて高い非線形性を有するものの，光学的等方性のために複屈折位相整合が不可能で波長変換用結晶としては注目されていなかった。これに対して，最近，特殊な結晶成長法を用いることで周期反転構造の作製が可能であることが示され，QPM 波長変換デバイス実現の期待が高まっている。半導体レーザと集積化可能な特

徴を活かした機能デバイスや，長波長域の優れた透過性を活用した中間赤外域波長可変光源などへの応用が検討されている。

■光第 2 高調波発生 (SHG)　z 方向に伝搬する平面波に対する光第 2 高調波発生 (SHG) の振る舞いは次の結合波方程式で記述される。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{E}_{2\omega}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{i}\omega}{n^{2\omega}c} d_{\mathrm{eff}} \tilde{E}_{\omega}^2 \exp(-\mathrm{i}\Delta kz) \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{E}_{\omega}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{i}\omega}{n^{\omega}c} d_{\mathrm{eff}} \tilde{E}_{\omega}^* \tilde{E}_{2\omega} \exp(\mathrm{i}\Delta kz) \end{cases} \tag{7.34}$$

ここで 2 つの式で同じ実効非線形光学定数 $d_{\mathrm{eff}} = (1/2)\chi^{(2)}_{\mathrm{eff}}(-2\omega; \omega, \omega)$ を使っているのは，全交換対称性を仮定しているためである。

基本波が平面波状に入射し，かつ変化効率が低く基本波の減衰が無視できる場合には，出力第 2 高調波の強度は式 (7.22) で与えられることは既に述べた。以下では，これらの仮定が成り立たない場合について議論する。

基本波の減衰　変換効率が高くなるとそれによる基本波の減衰の影響を無視できなくなる。位相整合条件下で第 2 高調波の入力がない場合（$E_{2\omega}(0) = 0$）には，式 (7.34) の連立方程式の解から

$$\begin{cases} I_{2\omega}(L) = I_{\omega}(0) \tanh^2\left(\sqrt{\dfrac{2\omega^2}{\epsilon_0 c^3}\dfrac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^3} I_{\omega}(0)}\ L\right) \\ I_{\omega}(L) = I_{\omega}(0) \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\dfrac{2\omega^2}{\epsilon_0 c^3}\dfrac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^3} I_{\omega}(0)}\ L\right) \end{cases} \tag{7.35}$$

となる。

回折の影響　変換効率を高めるために基本波ビームをきつく集光すると，回折の効果が顕著になり高いパワー密度を確保できる相互作用領域の長さが短くなってしまう。したがって，パワー密度と相互作用長のトレードオフによって決定される最適な集光条件が存在することになる。ウォークオフがなくコンフォーカル長 b と結晶長 L の間に $b = L/2.84$ の関係が成り立つ場合がもっとも効率が高く，

$$\mathscr{P}_{2\omega}(L) = 1.068\,\frac{2\omega^3}{\pi\epsilon_0 c^4}\frac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^{\omega}n^{2\omega}}\mathscr{P}_{\omega}^2\,L \tag{7.36}$$

の出力が得られる。集光条件下での最適第 2 高調波出力は非線形媒質の長さ L の 2 乗ではなく 1 乗に比例することに注意せよ。

共振器を用いた高効率化　非線形媒質を共振器中において基本波パワーを増強することによって変換効率を格段に高めることができる。入射基本波をすべて共振器に結合させるためには，入射ミラーのパワー透過率 $1 - R$ を共振器内の全伝搬損失と一致させればよい（インピーダンス整合）。変換効率が低い場合には，全伝搬損失は出射ミラーの反射率と非線形媒質の伝搬損失のみで決定されるが，変換効率が高くなると基本波から第 2 高調波への変換過程も伝搬損失として考慮する必要が出てくる。インピーダンス整合がとれているとき，共振器中での基本波パワーは $1/(1-R)$ 倍に増強され，第 2 高調波出力パワーは式 (7.36) の $1/(1-R)^2$ 倍に増加する。

導波路構造による高効率化　高効率化のもう一つの手段は導波路化である。基本波を導波路中に閉じ込めることによって，高いパワー密度を保ったまま長い相互作用長を確保することができる。導波層厚 D のスラブ導波路で基本波 n 次 TE 導波モードから第 2 高調波 m 次 TE 導波モードへの変換で得

られる（幅 W の部分からの）第 2 高調波パワーは次の式で与えられる。

$$\mathscr{P}_{2\omega}(L) = \frac{2\omega^2}{\epsilon_0 c^3}\frac{d_{\mathrm{eff}}^2}{(n_{\mathrm{eff}}^{\omega})^2 n_{\mathrm{eff}}^{2\omega}}\frac{\mathscr{P}_{\omega}^2}{W}\frac{S_{nm}^2}{(D_{\mathrm{eff}}^{\omega})^2 D_{\mathrm{eff}}^{2\omega}} L^2 \frac{\sin^2(\Delta\beta L/2)}{(\Delta\beta L/2)^2} \tag{7.37}$$

ここで，$D_{\mathrm{eff}}^{\omega}, D_{\mathrm{eff}}^{2\omega}$ はそれぞれ基本波と第 2 高調波モードに対する実効導波層厚,

$$S_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{d}(x)[f_n^{\omega}(x)]^2 f_m^{2\omega}(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.38}$$

は重なり積分と呼ばれる。f_n^{ω}，$f_m^{2\omega}$ は基本波と第 2 高調波モードの規格化モード分布関数で，$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x = D_{\mathrm{eff}}$ となるように規格化されているものとする。また，$\tilde{d}(x)$ は規格化された非線形光学定数である。重なり積分は伝搬方向に垂直な方向 (x) の位相整合因子に相当する。これをもっとも大きくするのは基本波・第 2 高調波ともに最低次モードの場合 $(n = m = 0)$ で，$S \simeq D_{\mathrm{eff}}$ となり，位相整合条件 $(\Delta\beta = 0)$ では

$$\mathscr{P}_{2\omega} \simeq \frac{2\omega^2}{\epsilon_0 c^3}\frac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^3}\frac{\mathscr{P}_{\omega}^2}{WD}L^2 \tag{7.39}$$

である。これとバルクの場合の式 (7.36) とを比較すると，導波路の場合の方が $\lambda_{\omega}L/2nWD$ 倍効率が高いことがわかる。最低次モード同士での位相整合を達成するために疑似位相整合 (QPM) がしばしば用いられる。

■和周波発生 (SFG)　和周波発生 $(\omega_1 + \omega_2 \to \omega_3)$ の振る舞いは次の結合波方程式によって記述される。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{E}_{\omega_3}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{i}\omega_3}{n^{\omega_3}c}d_{\mathrm{eff}}\tilde{E}_{\omega_1}\tilde{E}_{\omega_2}\exp(-\mathrm{i}\Delta kz) \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{E}_{\omega_1}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{i}\omega_1}{n^{\omega_1}c}d_{\mathrm{eff}}\tilde{E}_{\omega_2}^{*}\tilde{E}_{\omega_3}\exp(\mathrm{i}\Delta kz) \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{E}_{\omega_2}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{i}\omega_2}{n^{\omega_2}c}d_{\mathrm{eff}}\tilde{E}_{\omega_1}^{*}\tilde{E}_{\omega_3}\exp(\mathrm{i}\Delta kz) \end{cases} \tag{7.40}$$

ここで，波数不整合は

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 \tag{7.41}$$

である。変換効率が低く入射光の減衰が無視できるならば

$$I_{\omega_3}(L) = \frac{2\omega_3^2}{\epsilon_0 c^3}\frac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^{\omega_1}n^{\omega_2}n^{\omega_3}} I_{\omega_1}(0)I_{\omega_2}(0)\,L^2\frac{\sin^2(\Delta kL/2)}{(\Delta kL/2)^2} \tag{7.42}$$

である。入射光の減衰を考慮した場合の結合波方程式 (7.40) の一般解は Jacobi の楕円関数を用いて表すことができる。ここでは，位相整合条件下で片方の入力光が強い場合の極限での解を示す。振動数 ω_2 の入射光の光子数が十分多く $(I_{\omega_1}(0)/\omega_1 \ll I_{\omega_2}(0)/\omega_2)$，その減衰を無視できる場合には,

$$\begin{cases} I_{\omega_3}(L) = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}I_{\omega_1}(0)\,\sin^2\left(\sqrt{\dfrac{2\omega_1\omega_3}{\epsilon_0 c^3}\dfrac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^{\omega_1}n^{\omega_2}n^{\omega_3}}I_{\omega_2}(0)}\;L\right) \\ I_{\omega_1}(L) = I_{\omega_1}(0)\,\cos^2\left(\sqrt{\dfrac{2\omega_1\omega_3}{\epsilon_0 c^3}\dfrac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^{\omega_1}n^{\omega_2}n^{\omega_3}}I_{\omega_2}(0)}\;L\right) \end{cases} \tag{7.43}$$

となり，相互作用長の増加に対して振動的な振る舞いを示す。

■差周波発生 (DFG)　差周波発生 ($\omega_p - \omega_s \to \omega_i$) の振る舞いは次の結合波方程式によって記述される。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{E}_{\omega_i}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{i}\omega_i}{n^{\omega_i}c} d_{\mathrm{eff}} \tilde{E}_{\omega_p} \tilde{E}^*_{\omega_s} \exp(-\mathrm{i}\Delta kz) \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{E}_{\omega_p}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{i}\omega_p}{n^{\omega_p}c} d_{\mathrm{eff}} \tilde{E}_{\omega_s} \tilde{E}_{\omega_i} \exp(\mathrm{i}\Delta kz) \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{E}_{\omega_s}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{i}\omega_s}{n^{\omega_s}c} d_{\mathrm{eff}} \tilde{E}^*_{\omega_i} \tilde{E}_{\omega_p} \exp(-\mathrm{i}\Delta kz) \end{cases} \tag{7.44}$$

ここで，波数不整合は

$$\Delta k = k_i + k_s - k_p \tag{7.45}$$

である。変換効率が低く入射光の減衰が無視できるならば

$$I_{\omega_i}(L) = \frac{2\omega_i^2}{\epsilon_0 c^3} \frac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^{\omega_i} n^{\omega_s} n^{\omega_p}} I_{\omega_p}(0) I_{\omega_s}(0)\, L^2 \frac{\sin^2(\Delta kL/2)}{(\Delta kL/2)^2} \tag{7.46}$$

である。入射光の減衰を考慮した場合の結合波方程式 (7.44) の一般解は，和周波発生の場合と同様，Jacobi の楕円関数を用いて表すことができる。差周波発生の場合は和周波発生や第 2 高調波発生と本質的に異なる振る舞いが現れる。振動数 ω_p のポンプ光の強度が十分に強く ($I_{\omega_s}(0)/\omega_s \ll I_{\omega_p}(0)/\omega_p$)，位相整合時にもその減衰が無視できるとすると

$$\begin{cases} I_{\omega_i}(L) = \dfrac{\omega_i}{\omega_s} I_{\omega_s}(0) \sinh^2\left(\sqrt{\dfrac{2\omega_s\omega_i}{\epsilon_0 c^3} \dfrac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^{\omega_s} n^{\omega_i} n^{\omega_p}} I_{\omega_p}(0)}\ L \right) \\ I_{\omega_s}(L) = I_{\omega_s}(0) \cosh^2\left(\sqrt{\dfrac{2\omega_s\omega_i}{\epsilon_0 c^3} \dfrac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^{\omega_s} n^{\omega_i} n^{\omega_p}} I_{\omega_p}(0)}\ L \right) \end{cases} \tag{7.47}$$

と，発生した差周波光（振動数 ω_i）だけでなく入力光（振動数 ω_s）も $\omega_p - \omega_i \to \omega_s$ の過程を介して増幅を受けて成長していく。

■パラメトリック増幅・発振 (OPA・OPG)　非線形媒質に振動数 ω_p の強いポンプ光と振動数 $\omega_s (< \omega_p)$ のシグナル光とを入射すると，差周波発生の過程を介して式 (7.47) の様にシグナル光が増幅されると同時に振動数 $\omega_i = \omega_p - \omega_s$ のアイドラ光が発生して増幅されていく。この過程を**光パラメトリック増幅 (OPA: Optical Parametric Amplification)** という。その利得係数は

$$g = \sqrt{\frac{2\omega_s\omega_i}{\epsilon_0 c^3} \frac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^{\omega_s} n^{\omega_i} n^{\omega_p}}\, I_{\omega_p}} = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{2\epsilon_0 c^3} \frac{d_{\mathrm{eff}}^2}{n^{\omega_s} n^{\omega_i} n^{\omega_p}}\, I_{\omega_p}\, (1 - \delta^2)} \tag{7.48}$$

で与えられる。ここで，δ は

$$\omega_s = \frac{1}{2}\omega_p(1 + \delta), \quad \omega_i = \frac{1}{2}\omega_p(1 - \delta) \tag{7.49}$$

で定義される振動数の縮退因子である。縮退点 ($\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$) に近い方が利得は大きくなる。

　ここまではシグナル光を明示的に外部から入射した場合を取り扱ってきたが，輻射場を量子化して計算すると，ポンプ光以外の光の入射がない場合でもシグナル光とアイドラ光が発生することが示される。これは，真空場の零点振動を入力としたパラメトリック増幅過程であると解釈できる。これを**パラメトリック蛍光 (parametric fluorescence)** と呼ぶ。

パラメトリック蛍光はパラメトリック過程による自然放出現象であるが，これに正のフィードバックをかけることによって発振を起こしてコヒーレント光を取り出すことが可能である。これが**光パラメトリック発振 (OPO: optical parametric oscillation)** である。パラメトリック発振は，通常は非線形媒質を共振器中に置くことで実現される。共振器 1 周あたりの減衰とパラメトリック効果による増幅とがつりあったときに発振が起こる。シグナル光とアイドラ光の両方に対して共振器を構成する DRO (doubly resonant oscillator) とシグナル光に対してのみ共振器とする SRO (singly resonant oscillator) がある。

定在波型の DRO では，発振のしきい利得は

$$\cosh(g_{\mathrm{th}}L) = \frac{1 + R_s \exp(-\alpha_s L) R_i \exp(-\alpha_i L)}{R_s \exp(-\alpha_s L) + R_i \exp(-\alpha_i L)} \tag{7.50}$$

で決定される。ここで $R_{s,i}$ はシグナル（アイドラ）光に対する共振器ミラーの反射率，$\alpha_{s,i}$ はフレネル損や散乱損失・吸収損失を含めた減衰係数である。共振器の Q 値が十分に高い場合 ($R\exp(-\alpha L) \simeq 1$) には

$$(g_{\mathrm{th}}L)^2 \simeq [1 - R_s \exp(-\alpha_s L)][1 - R_i \exp(-\alpha_i L)] \tag{7.51}$$

となる。DRO パラメトリック発振器の変換効率は

$$\eta = \frac{\mathscr{P}_s + \mathscr{P}_i}{\mathscr{P}_p(0)} = \frac{2}{N}(\sqrt{N} - 1) \tag{7.52}$$

で与えられる。$N = \mathscr{P}_p(0)/\mathscr{P}_{p,\mathrm{th}}$ はしきいポンプパワーで規格化した入力ポンプパワーである。$N = 4$ で最大 50 % の変換効率が得られる。リング共振器構造をとれば 100% の変換効率を得ることができる。DRO は比較的低いしきい値で発振可能だが，共振器長などのわずかな変化に対して発振モードが大きく跳んで動作が不安定になるので、安定化のために工夫が必要となる。

一方，SRO での発振しきい利得と変換効率は

$$(g_{\mathrm{th}}L)^2 \simeq 2[1 - R_s \exp(-\alpha_s L)] \tag{7.53}$$

$$\eta = \sin^2 G \quad (\sin^2 G/G^2 = 1/N) \tag{7.54}$$

である。SRO の発振しきいポンプパワーは DRO の場合の $2/[1 - R_i \exp(-\alpha_i L)]$ 倍高くなるが，特別な工夫なしに安定動作を実現することができる。

パラメトリック発振器では得られるシグナル光とアイドラ光の波長は非線形媒質の位相整合条件によって決定される。これを利用して BBO などの結晶を用いた光パラメトリック発振器が波長可変コヒーレント光源として実用化されている。

7.4.2　1 次の電気光学効果

電気光学効果はレーザの発明以前から知られていた最も歴史の古い非線形光学効果である。2 次の非線形光学効果のひとつである **1 次電気光学効果 (linear eleocrooptic effect)（ポッケルス効果 (Pockels effect)）** は，19 世紀から知られていた現象で，これを用いることで電気信号による光の振幅変調・位相変調などが可能となる。**電気光学変調（electrooptic modulation, EO 変調）** は，レーザー光の外部変調やパルスピッカー，Q スイッチングなどに応用されている。高速大容量光通信の分野では，半導体を用いた吸収型変調器が広く用いられるようになってきているが，電気光学効果を利用した光変調器はチャープのない理想的な変調が実現できることから，今後も様々な分野で利用され続けるものと思われる。

■電気光学効果　電気光学定数は以下のように電場印加による屈折率楕円体のひずみに対して定義されている。一般に，屈折率楕円体は

$$B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + 2B_{23}yz + 2B_{31}zx + 2B_{12}xy = 1 \tag{7.55}$$

で表される。ここで，B は比誘電率テンソル ϵ^r の逆テンソル（$B\epsilon^r = I$）である。x,y,z 軸を誘電主軸にとると，電場がないときには

$$\begin{aligned} &B_{11} = \frac{1}{n_x^2}, \quad B_{22} = \frac{1}{n_y^2}, \quad B_{33} = \frac{1}{n_z^2}, \\ &B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0 \end{aligned} \tag{7.56}$$

であるが，ここに電場 $\boldsymbol{E}$ が印加されると，屈折率楕円体がひずむことになる。これが電気光学効果である。電気光学定数は以下のように，このときの B_{ij} の変化から定義される。

$$B_{ij}(\boldsymbol{E}) - B_{ij}(0) = \Delta B_{ij} = \sum_{k=1}^{3} r_{ijk}E_k + \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} s_{ijkl}E_kE_l \tag{7.57}$$

３階のテンソルである r_{ijk} を**１次（線形）電気光学係数 (linear electrooptic coefficient)**，あるいは**ポッケルス定数 (Pockels coefficient)**，４階のテンソルである s_{ijkl} を**２次電気光学定数 (quadratic electrooptic coefficient)**，あるいは**カー定数 (Kerr coefficient)** とよぶ。２次電気光学効果は 1873 年に Kerr によって始めて観測された。これが人類史上最初の非線形光学効果の発見であった。その後，Röntgen と Kundt によって初めて１次電気光学効果が見出され，Pockels によって本格的に研究された。

■１次電気光学定数　反転対称性を欠く物質では１次電気光学効果が発現し，通常その大きさは２次電気光学効果よりもはるかに大きい。以下では１次電気光学効果についてみていこう。電気光学テンソル r_{ijk} は i, j の交換に対して不変なので，以下の規則にしたがって $(ij) \to m$ の縮約をおこなうと 6×3 の行列形式 r_{mk} に書き直すことができる。

ij	xx	yy	zz	yz,zy	zx,xz	xy,yx
m	1	2	3	4	5	6

縮約形式の電気光学係数テンソル r_{mk} を用いると，式 (7.57) は

$$\begin{pmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{7.58}$$

と書き直せる。

電気光学定数の 18 個の成分のうち 0 になるものや 0 でない成分間の関係などは媒質の空間的な対称性によって一意に定まる。

■非線形感受率との関係　ここで，r_{ijk} と非線形感受率 $\chi^{(2)}$ の関係を見ておこう。電場が印加されたことによる誘電率 $\epsilon^r = n^2$ の変化が十分に小さい場合には,

$$\Delta\epsilon_{ij}^r = -\sum_{\alpha\beta} \epsilon_{i\alpha}^r \Delta B_{\alpha\beta} \epsilon_{\beta j}^r \tag{7.59}$$

で与えられる。誘電主軸を座標軸とすれば $\epsilon^r_{ij} = \delta_{ij}\epsilon^r_{ii}$ なので，

$$\Delta\epsilon^r_{ij} = -\epsilon^r_{ii}\Delta B_{ij}\epsilon^r_{jj} = -\epsilon^r_{ii}\sum_k r_{ijk}E_k\epsilon^r_{jj} \tag{7.60}$$

となる。一方，

$$\begin{aligned} D^\omega_i &= \epsilon_0\sum_j(1+\chi^{(1)}_{ij})E^\omega_j + 2\epsilon_0\sum_{jk}\chi^{(2)}_{ijk}(-\omega;\omega,0)E^\omega_j E_k \\ &= \epsilon_0\sum_j(\epsilon^r_{ij}+\Delta\epsilon^r_{ij})E^\omega_j \end{aligned} \tag{7.61}$$

であるから，

$$\Delta\epsilon^r_{ij} = 2\sum_k \chi^{(2)}_{ijk}(-\omega;\omega,0)E_k \tag{7.62}$$

と書ける。式 (7.60) と (7.62) を比較すると，

$$r_{ijk} = -\frac{2}{\epsilon^r_{ii}\epsilon^r_{jj}}\chi^{(2)}_{ijk}(-\omega;\omega,0) = -\frac{2}{n_i^2 n_j^2}\chi^{(2)}_{ijk}(-\omega;\omega,0) \tag{7.63}$$

であることがわかる。

■電気光学効果による屈折率変化　電気光学効果によって引き起こされる屈折率変化について，いくつかの代表的な電気光学結晶の例を以下にまとめる。

点群 $\bar{4}2m$ の結晶　KDP（KH_2PO_4）や DKDP（重水素化 KDP）に代表される点群 $\bar{4}2m$ の結晶は，後述する縦型変調の構成でポッケルスセルに用いられる重要な電気光学結晶である。その電気光学テンソルは

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix} \tag{7.64}$$

という形になる。ここに電場 $\boldsymbol{E}$ を印加するとその屈折率楕円体は

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} + 2r_{41}E_x yz + 2r_{41}E_y zx + 2r_{63}E_z xy = 1 \tag{7.65}$$

となる（単軸結晶なので $n_x = n_y = n_o, n_z = n_e$ とした）。このように，電場印加時には屈折率楕円体はひずみ，その主軸の向きはもはや x, y, z に平行でなくなる。

印加電場 $\boldsymbol{E}$ が z 軸に平行な場合には

$$\frac{x^2+y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} + 2r_{63}E_z xy = 1 \tag{7.66}$$

となる。この場合の主軸は，x 軸，y 軸をそれぞれ z 軸の周りに 45° 回転した x' 軸，y' 軸，そして z 軸となり，主屈折率は

$$\begin{aligned} n_{x'} &= \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z\right)^{-1/2} = n_o - \frac{n_o^3}{2}r_{63}E_z \\ n_{y'} &= \left(\frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z\right)^{-1/2} = n_o + \frac{n_o^3}{2}r_{63}E_z \\ n_z &= n_e \end{aligned} \tag{7.67}$$

となる。

点群 $3m$ の結晶　$LiNbO_3$，$LiTaO_3$ は横型変調器，導波路型変調素子に広く用いられる高性能電気光学結晶で，点群 $3m$ に属する単軸結晶である。その電気光学テンソルは

$$r = \begin{pmatrix} 0 & r_{61} & r_{13} \\ 0 & -r_{61} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ r_{61} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.68}$$

という形である。この結晶に z 軸（c 軸）に平行な電場を印加した場合，誘電主軸の方向は変わらず，主屈折率が

$$\begin{aligned} n_x &= n_o - \frac{n_o^3}{2} r_{13} E_z \\ n_y &= n_o - \frac{n_o^3}{2} r_{13} E_z \\ n_z &= n_e - \frac{n_e^3}{2} r_{33} E_z \end{aligned} \tag{7.69}$$

と変化する。

点群 $\bar{4}3m$ の結晶　GaAs，CdTe などの化合物半導体は，中間赤外域で良好な透過特性を有する点群 $\bar{4}3m$ の等方性結晶であり，その電気光学テンソルは

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix} \tag{7.70}$$

である。これに (001) 面に垂直な $\boldsymbol{E} = E\hat{z}$ を印加すると，主軸は $\boldsymbol{x}'$//[110]，$\boldsymbol{y}'$//[$\bar{1}$10]，$\boldsymbol{z}$ となり，主屈折率は

$$\begin{aligned} n_{x'} &= n + \frac{n^3}{2} r_{41} E \\ n_{y'} &= n - \frac{n^3}{2} r_{41} E \\ n_z &= n \end{aligned} \tag{7.71}$$

となる。これに対して, (110) 面に垂直な $\boldsymbol{E}$//[110] を印加した場合は, 主軸は $\boldsymbol{x}'$//[11 $\bar{\sqrt{2}}$], $\boldsymbol{y}'$//[11 $\sqrt{2}$], $\boldsymbol{z}'$//[1$\bar{1}$0]，主屈折率は

$$\begin{aligned} n_{x'} &= n + \frac{n^3}{2} r_{41} E \\ n_{y'} &= n - \frac{n^3}{2} r_{41} E \\ n_{z'} &= n \end{aligned} \tag{7.72}$$

である。

■電気光学効果によって生じる現象

位相変調　上で見たように，１次の電気光学効果では，印加電場に比例して屈折率が変化する。これにより結晶の光路長が変化するので，透過光の**位相変調 (phase modulation)** が容易に実現できる。長さ L の結晶中を伝搬する波長 λ の光は

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n L \tag{7.73}$$

の位相シフトを受ける。１次電気光学効果による典型的な屈折率変化 Δn の大きさは 10^{-4}〜10^{-5} 程度なので，可視光に対して cm オーダーの結晶長で十分な位相変化が得られる。

周波数変調　時間変化する電場を印加すればそれに追随して位相が変動するので，

$$\Delta\nu = \frac{\mathrm{d}(\Delta\phi)}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\mathrm{d}(\Delta n)}{\mathrm{d}t}L \tag{7.74}$$

の周波数変化が得られる。交流電場を印加すれば出射光のスペクトルにサイドバンドが現れ，これを光周波数シフターに利用することができる。

強度変調　適切な構成をとることで，位相変化を利用して振幅変化，強度変化を実現することができる。後述の縦型変調器のように結晶内の直交する２偏光の位相差に起因する偏光状態の変化を利用する方法，マッハツェンダー干渉計のような２光路干渉を利用する方法，隣接する導波路間の結合が伝搬定数に依存することを利用する方向性結合型，などがある。

ビーム偏向　プリズム状電気光学結晶中の光路長差を印加電場により制御できることを用いて，**ビーム偏向 (beam diflection)** を実現できる。可動部がなく，高速動作可能である点が特徴である。

導波路モード変換・フィルター　電気光学効果によって生じる複屈折やカットオフの変動を利用して，導波路の TE-TM モード変換，フィルターなどが実現できる。

■電気光学変調器

縦型変調器　KDP などを用いた**図22**のような構成の変調器を**縦型変調器 (longitudinal modulator)** とよぶ。z 軸方向の長さ L の KDP に z 軸に平行な電場 $E_z = V/L$（V は印加電圧）を印加し，z 軸に

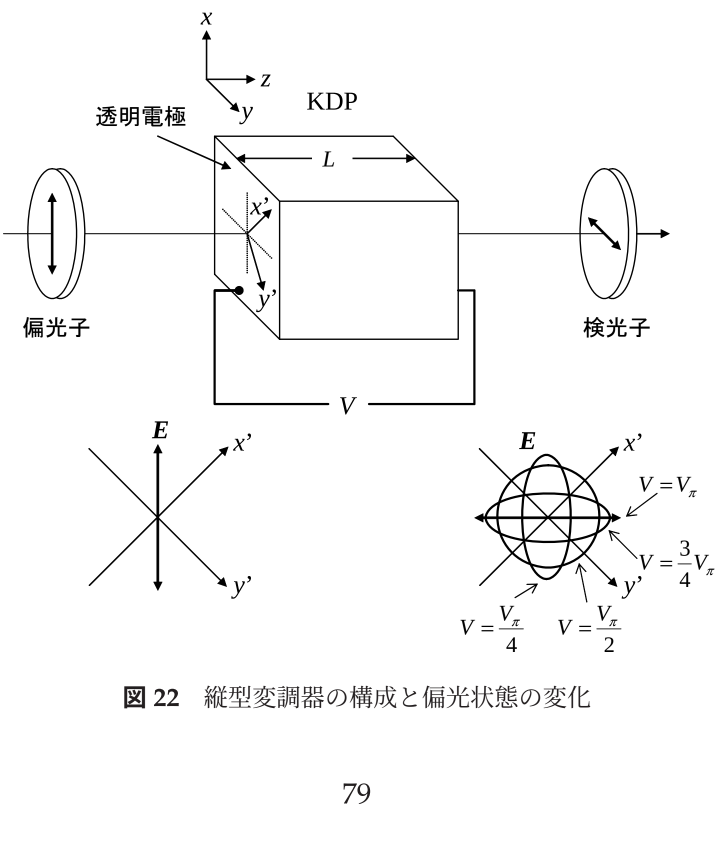

図 22　縦型変調器の構成と偏光状態の変化

平行に光を入射する。光電場は $x'y'$ 平面内にあるので，

$$n_{x'} - n_{y'} = n_o^3 r_{63} E_z \tag{7.75}$$

の複屈折を感じて伝搬し，$E_{x'}$ と $E_{y'}$ 間の位相差は結晶を通過することによって

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(n_{x'} - n_{y'})L = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} V \tag{7.76}$$

だけ増加することになる。この位相差を**リターデイション (retardation)** という。x 方向に電場の振動する直線偏光の光を入射すると，リターデイションによって偏光状態が変化し，楕円偏光となって出射する。リターデイションが π になる電圧（**半波長電圧 (half-wave voltage)**）

$$V_\pi = \frac{\lambda}{2n_o^3 r_{63}} \tag{7.77}$$

を用いて式 (7.76) は

$$\Gamma = \pi \frac{V}{V_\pi} \tag{7.78}$$

と書ける。V_π を印加すると，x 方向に直線偏光した入射光が y 方向の直線偏光となって出射することになる。２枚の直交した偏光板の間に KDP を配置し，電圧を印加することによって，透過率は

$$\frac{I_o}{I_i} = \sin^2\frac{\Gamma}{2} = \sin^2\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{V}{V_\pi}\right] \tag{7.79}$$

と変化するので，$V = 0$ と $V = V_\pi$ の間で光強度スイッチングができる。

縦型変調器の構成では，半波長電圧が形状に依存しないので，後述の横型変調器のような動作電圧の低減や高感度化は望めない。しかし，レーザの Q スイッチのように大きな開口が要求される場合には横型のメリットがいかせないので，むしろ，形状や温度に特性が依存しない縦型変調器の特性は好ましいものとなる。KDP などを用いた縦型振幅変調器はポッケルスセルとして市販されており，レーザの Q スイッチやパルス切り出しなどに広く用いられている。

横型変調器　**図23**のように，長さ L（x 方向），厚さ D（z 方向）の $LiNbO_3$ の厚み方向に電圧 V を印加して x 方向に光を伝搬させた場合について考えよう。この場合のリターデイションは

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(n_y - n_z)L = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)L + \frac{\pi}{\lambda}(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{31})V\frac{L}{D} \tag{7.80}$$

となる。このように，光の伝搬方向に対して垂直に電圧を印加する**横型変調器 (transversal modulator)** では，縦型変調と比べてリターデイションが L/D だけ大きくなり，それに反比例して半波長

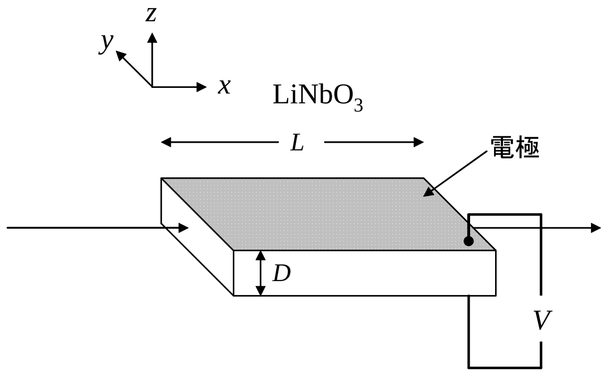

図 23　横型変調器の構成

電圧 V_π を小さくできる。この方法では位相差に一定のバイアス（$2\pi(n_e - n_o)L/\lambda$）があること，これが温度に敏感に依存することから，精密な温度補償が必要になる。

z 軸方向に電場が振動する直線偏光を用いればバイアスの問題は生じない。この場合は入射光は直線偏光のまま伝搬し，振幅（強度）変調は起きず，

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n_z L = -\frac{\pi}{\lambda}n_e^3 r_{33} V\frac{L}{D} \tag{7.81}$$

による位相変調 (phase modulation) のみが生じる。

導波路型のデバイスでは L/D を極端に大きくできるので，この横型位相変調を方向性結合器やマッハツェンダー型干渉器と組み合わせることで，低電圧駆動の電気光学スイッチが実現されている。

進行波型変調器　変調振動数が極端に高くなってくると，電気光学結晶中を伝搬している光がいたるところで同じ屈折率変化を感じて伝搬しているとする前提が成り立たなくなってしまう。印加電場 E_z が振動数 $\nu_m = \omega_m/2\pi$ の正弦波 $E_z(t) = E_m e^{i\omega_m t}$ であるとすると，

$$\Gamma(t) = -\frac{\pi}{\lambda}n_e^3 r_{33} V\frac{L}{D}\left(\frac{1 - e^{i\omega_m\tau}}{i\omega_m\tau}\right)e^{i\omega_m t} \tag{7.82}$$

となる。ここで，$\tau = nL/c$ は光が結晶を通過するのに要する時間である。走行時間が無限小とみなせる場合と比べると，変調度が

$$|\rho| = \left|\frac{1 - e^{i\omega_m\tau}}{i\omega_m\tau}\right| = \frac{\sin(\omega_m\tau/2)}{\omega_m\tau/2} \tag{7.83}$$

だけ減少することがわかる。$\omega_m\tau = \pi/2$ では $|\rho| = 0.9$ となるが，このときの周波数

$$(\nu_m)_{\max} = \frac{c}{4nL} \tag{7.84}$$

が変調周波数の上限を与える。10 mm 長の $LiNbO_3$（$n \simeq 2.2$）では，$(\nu_m)_{\max} = 3.4$ GHz である。

こうした変調周波数の制限を回避するために，印加電場を進行波として光の進行方向と平行に伝搬させる進行波型変調器 (traveling-wave modulator) が用いられる。印加電場が光と同じ位相速度で進めば，光はつねに同じ変調電場を感じて伝搬することになるので，上記の制限を回避できることになる。実際には，光の位相速度 c/n と電場の位相速度 $c/\sqrt{\epsilon_s}$ は異なるので，この点を考慮する必要である。この場合には，

$$\Gamma(t) = -\frac{\pi}{\lambda}n_e^3 r_{33} V\frac{L}{D}\left(\frac{1 - e^{i\omega_m\tau(1-\sqrt{\epsilon_s}/n)}}{i\omega_m\tau(1-\sqrt{\epsilon_s}/n)}\right)e^{i\omega_m t} \tag{7.85}$$

となり，低周波変調時と比較したときの変調度の低下は

$$|\rho| = \frac{\sin(\omega_m\tau|1-\sqrt{\epsilon_s}/n|/2)}{\omega_m\tau|1-\sqrt{\epsilon_s}/n|/2} \tag{7.86}$$

で与えられる。すなわち，変調周波数は $1/|1-\sqrt{\epsilon_s}/n|$ だけ高くでき，変調度 90 % に対して

$$(\nu_m)_{\max} = \frac{c}{4nL|1-\sqrt{\epsilon_s}/n|} \tag{7.87}$$

となる。これをさらに高周波化するために，PPLN や PPLT を用いた疑似速度整合 (quasi velocity matching) 進行波型電気光学変調器も検討されている。

7.5　3 次非線形光学効果の応用

7.5.1　非線形屈折率とその応用

3 次の非線形光学効果は極めて多彩な現象を引き起こし，それらは様々な分野で利用されている。ここでは，その中で工学的にもっとも重要と思われる非線形屈折率効果，特に光双安定性と光ソリトンを取り上げる。

非線形屈折率効果は，入射光と同じ振動数を持つ非線形分極によって引き起こされるものである。非線形分極を誘起する入射光とそれによって変化する光は必ずしも同じである必要はないが，両者が同一の光波である場合には特にこれを光の自己作用と呼ぶ。光カー効果，位相共役光の発生，自己収束・発散，自己束縛，自己位相変調などが非線形屈折率効果の代表的な例である。非線形屈折率効果の物理的な起源には，電子分極の非線形性（超分極率)，(狭義の）光カー効果，電歪効果，吸収飽和，分子の再分布，熱的効果，フォトリフラクティブ（光屈折率）効果，$\chi^{(2)}$ のカスケード効果などがある。

■非線形屈折率の定義　非線形屈折率の定義は様々な文献で互いに異なったものが採用されてきたため，現在でもしばしば混乱のもととなっている。ここでは，屈折率変化の入射光強度 I_ω の係数として

$$n = n_0 + n_2^I I_\omega \tag{7.88}$$

で非線形屈折率 n_2^I を定義する（簡単のために屈折率の指標 ω は省略する)。この効果が 3 次の非線形光学現象として記述できる場合には

$$n_2^I = \frac{3}{4\epsilon_0 n_0^2 c}\mathrm{Re}\chi^{(3)}(-\omega;\omega,-\omega,\omega) \tag{7.89}$$

の関係が成り立つ（これは自己作用の場合の関係である。そうでない場合には右辺の係数はこの 2 倍になることに注意)。非線形屈折率を電場の 2 乗に対して定義する場合も多い。

$$n = n_0 + n_2|E_\omega|^2 \tag{7.90}$$

ここで $|E_\omega|$ は電場振幅で，

$$n_2 = \frac{\epsilon_0 n_0 c}{2} n_2^I = \frac{3}{8n_0}\mathrm{Re}\chi^{(3)}(-\omega;\omega,-\omega,\omega) \tag{7.91}$$

である。さらに，

$$n = n_0 + n_2''\langle \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\rangle = n_0 + \frac{1}{2}n_2''|E_\omega|^2 = n_0 + 2n_2''|E_\omega'|^2 \quad (n_2'' = 2n_2 = \frac{1}{2}n_2') \tag{7.92}$$

とする定義も見受けられる。以下では，誤解される恐れのもっとも少ない n_2^I を用いることにする。

■光双安定性　一つの入力光強度に対して出力光強度が 2 つの安定値をとる現象を**光双安定性 (optical bistability)** と呼ぶ。光双安定性は，光情報処理・通信に利用する高速光スイッチング，光演算，光記憶などの素子への応用を目指して研究が進められている。

光双安定性は光学的非線形性を有する媒質に正のフィードバックを施すことによって実現される。光双安定素子の動作は，通常，用いる非線形性とフィードバックの種類によって分類される。屈折率の非線形性を利用するものを分散型，吸収係数の非線形性を用いるものを吸収型と呼ぶ。また，光自

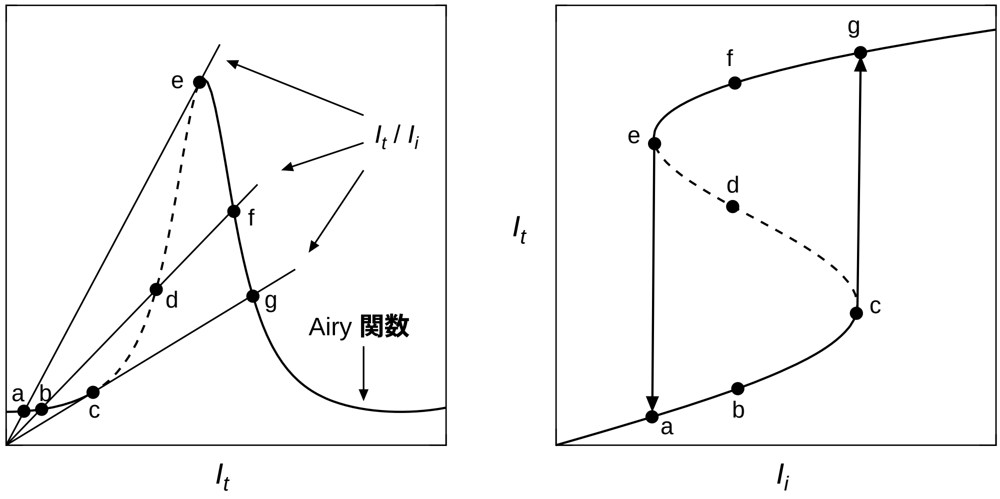

図 24 分散型非線形ファブリ・ペロー共振器の動作。式 (7.94) の解は左図から得ることができる。この素子の入出力特性は右図のように光双安定性を示す。いずれの図でも，不安定領域を点線で示した。

身のフィードバックによるものを純光学型，電気信号などにいったん変換してフィードバックをおこなうものを混成型という。ここでは，最初に実験的に光双安定性が実現された，ファブリ・ペロー共振器中に分散型非線形媒質を配したタイプの分散・純光学型光双安定素子を取り上げる。

パワー反射率 R（透過率 $T = 1 - R$）の 2 枚のミラーで構成された共振器長 L のファブリ・ペロー共振器中に非線形屈折率 n_2^I の非線形媒質が充填されている場合を考える。入射光強度 I_i に対するこの素子の透過光強度 I_t は

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{T^2}{T^2 + 4R\sin^2(\phi/2)} \tag{7.93}$$

で与えられる。ここで，$\phi = 4\pi nL/\lambda$ は共振器 1 往復での位相シフトである。共振器内の光強度 I_c がいたるところで一定である（平均場近似）としても差し支えないので，$n = n_0 + n_2^I I_c$ となり，

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{T^2}{T^2 + 4R\sin^2(\phi_0/2 + Kn_2^I I_t)} \tag{7.94}$$

が得られる。この式の I_t の解は解析的に得られないが，グラフを用いてその振る舞いを調べることができる。**図 24**の左図の曲線は式 (7.94) の右辺の Airy 関数の I_t 依存性を示す。直線はいずれも I_t/I_i を表し，その傾きは I_i^{-1} である。この直線と Airy 関数の交点の I_t が式 (7.94) の解となる。入射光強度 I_i を 0 から増加させていくと，a→b とたどって出力光強度が低い状態が保たれる。この状態では共振条件から外れたところで動作しているので，I_c が低く（すなわち I_t が低く）高透過状態 (e, f) に遷移することはない。さらに入射光強度を上げて c まで達したときに初めて高透過状態 g に不連続に出力が跳ぶ。逆に入射光強度を下げていくと，g→f とたどり，ここでは共振付近の動作による高透過状態が保たれる。e に達したときに初めて低透過状態 a に移る。このようにして (a, e)↔(c, g) 間で光双安定性が生ずるのである。

同じ構成で初期位相 ϕ_0 を調節して微分利得特性（光トランジスタ作用）やパワーリミッタ動作を実現することも可能である。

■自己位相変調と光ソリトン 非線形媒質中を光パルスが伝搬する場合には光強度が時間に依存するので，当然，その位相も非線形屈折率効果を介して時間に依存するようになる。これが**自己位相変調**

(self phase modulation) である。また，短パルス光ではスペクトルの広がりが大きくなり，**群速度分散 (group-velocity dispersion)** の影響が無視できなくなる。自己位相変調と群速度分散との絶妙なバランスによって**光ソリトン (optical soliton)** 伝搬が可能となる。

非線形シュレディンガー方程式　z 方向に平面波状に伝搬する光パルス

$$E(\omega) = \hat{E}_{\omega_0}(z, t) \exp(\mathrm{i}kz) \tag{7.95}$$

を考える。ここで，ω_0 は光パルスのキャリア振動数である。誘電率の分散を

$$\epsilon(\omega_0 + \delta\omega) = \epsilon(\omega_0) + \delta\omega \left.\frac{\mathrm{d}\epsilon(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} + \frac{1}{2}(\delta\omega)^2 \left.\frac{\mathrm{d}^2\epsilon(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\omega_0} \tag{7.96}$$

と 2 階微分まで考慮し，ゆるやかな振幅変化の近似 (SVA) を用いると，波動方程式 (7.14) から次の方程式が得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{E}_{\omega_0} + \frac{\mathrm{i}}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\omega_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{E}_{\omega_0} = \mathrm{i}\frac{\epsilon_0\omega_0 n_0 n_2^I}{2}|\hat{E}_{\omega_0}|^2\hat{E}_{\omega_0} \tag{7.97}$$

左辺第 1 項は $v_g = (\mathrm{d}k/\mathrm{d}\omega)^{-1}$ でのパルス光の伝搬を，第 2 項は群速度分散 $\partial(v_g^{-1})/\partial\omega$ の影響を，右辺は非線形屈折率の効果を表している。$\tau = t - z/v_g$, $\xi = z$ の座標変換をおこなうと

$$\mathrm{i}\frac{\partial\hat{E}_{\omega_0}}{\partial\xi} + \gamma|\hat{E}_{\omega_0}|^2\hat{E}_{\omega_0} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}\frac{\partial^2\hat{E}_{\omega_0}}{\partial\tau^2} \tag{7.98}$$

となる。ここで，$\gamma = \epsilon_0\omega_0 n_0 n_2^I/2 = 3\omega_0\mathrm{Re}\chi^{(3)}/8n_0 c$ である。この式は**非線形シュレディンガー方程式 (nonlinear Schrödinger equation)** と呼ばれる。

自己位相変調　簡単のために群速度分散 $\mathrm{d}^2k/\mathrm{d}\omega^2$ が無視できる場合について考えよう。このときの式 (7.98) の解は

$$\hat{E}_{\omega_0}(\xi, \tau) = \hat{E}_{\omega_0}(0, \tau) \exp\left[\mathrm{i}\frac{\epsilon_0\omega_0 n_0 n_2^I}{2}|\hat{E}_{\omega_0}(0, \tau)|^2\xi\right] \tag{7.99}$$

となる。このパルスは波形を変えずに伝搬するものの，その位相は長さ L 伝搬後は

$$\phi = \frac{\epsilon_0\omega_0 n_0 n_2^I}{2}|\hat{E}_{\omega_0}(0, \tau)|^2 L = \frac{\omega_0 n_2^I}{c} I_{\omega_0}(\tau) L \tag{7.100}$$

だけ変化する。すなわち，パルス中の強度変化に応じて位相変調がかかることになる。これが自己位相変調である。これによって

$$\Delta\omega = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0 n_2^I L}{c}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.101}$$

の振動数のシフトが生じる。石英系光ファイバーのように非線形屈折率の符号が正の媒質中ではパルスの立ち上がりの部分の振動数はキャリアの振動数よりも低く，立ち下がりの部分では振動数が高くなる。自己位相変調によるスペクトルの広がりは白色光の発生に応用されている。

非線形シュレディンガー方程式 (7.98) の右辺は群速度分散の効果を表しており，これは通常パルス幅を広げる作用を持つ。群速度分散 $\mathrm{d}^2k/\mathrm{d}\omega^2$ と非線形屈折率 n_2^I が同符号の場合には，これら 2 つの効果が相乗的に作用してパルスの時間軸・周波数軸上の幅を押し広げる。このパルスはほぼ線形の周波数チャーピングが生じた矩形波となり，これを異常分散特性を有する回折格子対を通過させることでパルス幅を圧縮することができる。群速度分散と非線形屈折率の符号がともに正である光ファイバーを用いて数フェムト秒の極短パルスが得られている。

光ソリトン　群速度分散と自己位相変調の効果をうまくバランスさせることによって安定なパルス伝搬を実現することができる。群速度分散は材料の屈折率分散とファイバーの構造分散によって決定されるが，通常の石英系光ファイバではこれらが波長 1.3 μm 付近でつりあって零分散となり，これより長波長側では負の群速度分散が生じる。光通信で利用される 1.55 μm 帯では負の群速度分散と正の非線形屈折率によってパルス幅の広がらないソリトンの伝搬が実現できる。これが光ソリトンである。

非線形シュレディンガー方程式 (7.98) のもっとも基本的な解は

$$\hat{E}_{\omega_0}(\xi,\tau) = \sqrt{-\frac{2(\mathrm{d}^2k/\mathrm{d}\omega^2)}{\epsilon_0\omega_0 n_0 n_2^I \tau_0^2}}\,\mathrm{sech}(\tau/\tau_0)\,\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^2k/\mathrm{d}\omega^2}{2\tau_0^2}\right) \tag{7.102}$$

で与えられる。これは基本ソリトンと呼ばれ，パルス波形を変えずに伝搬する。高次のソリトンは多数の基本ソリトンが互いに干渉し合いながら伝搬するもので，

$$z_0 = \frac{\pi\tau_0^2}{2|\mathrm{d}^2k/\mathrm{d}\omega^2|} \tag{7.103}$$

の周期で波形が変化しながら伝搬する。

基本ソリトンはパルス波形を変えることなく伝搬することから超高速光通信への応用を目指して研究が進められている。零分散域を長波長側にずらし群速度分散の絶対値を小さくした光ファイバを用いて，わずか 1 mW 程度のピークパワーのソリトン伝送によって 1 チャンネルあたり 10Gbit/s の無エラー通信が 1 万 km の距離で可能となっている。

7.5.2　3 次非線形光学材料

非線形屈折率効果を利用した高速光スイッチなどのデバイスに用いられる非線形光学材料には以下のような特性が要求される。

- 大きな非線形屈折率，すなわち 3 次非線形感受率を有すること
- 速い応答性能を有すること
- 用いる波長で吸収が小さいこと

これらの特性をすべて満足する材料は，現在のところ存在しない。どのようにすればすべての特性を満足できるかも，十分にわかっているとはいえないのが実情である。**表3**に各種の 3 次非線形光学材料の特性をまとめた。どれも一長一短で，万能な材料がないことがわかる。

表 3　各種の 3 次非線形光学材料の特性

非線形光学材料	$\chi^{(3)}$ (esu)	応答時間 (s)	吸収
石英ガラス	1.7×10^{-14}	$<10^{-14}$	ほぼゼロ
CS_2	5.2×10^{-13}	$<10^{-12}$	非常に小さい
ポリジアセチレン	3×10^{-10}	$<10^{-10}$	小さい
CdSSe ドープガラス	1.3×10^{-8}	$\sim10^{-11}$	中程度
GaAs	$\sim10^{-4}$	$\sim10^{-8}$	大きい
GaAs 量子井戸	5×10^{-2}	$\sim10^{-8}$	大きい
$(C_6H_{13}NH_3)_2PbI_4$	$\sim10^{-6}$	$\sim10^{-11}$	大きい

石英ガラスは非線形性は極めて小さいが，高速応答性と極めて高い透過性が最大の特徴である。石英がラスからつくられている長距離光通信用光ファイバー中では，非線形屈折率効果による自己位相変調と群速度分散（どちらもパルス幅を変える効果を有する）が見事に釣り合い，パルス幅の変わらない**ソリトン (soliton)** 伝搬が実現する。これは，高速光通信への応用を目指して活発に開発が進められており，近い将来，幹線系に利用される可能性が高い。CS_2 は古くから用いられてきた非線形光学材料で，非線形性は小さいものの，パルスレーザ光などの強い光に対しては高速光シャッターとして有効に利用できる。CdSSe などの半導体ドープガラスは，中程度の大きさの非線形性と高速応答性を有することから，かなり活発な研究・開発の対象となっている。$(C_6H_{13}NH_3)_2PbI_4$ は無機物と有機物が自己組織的に 2 次元電子系を形成する特異な物質であるが，その励起子共鳴において大きな非線形性と速い応答性能が共存していることが最近になって明らかになった。これを用いて Tbit/s クラスの光パルスの時間・空間変換が可能であることも示されている。