2016 年度 ナノ・機能マテリアル入門 第 3 回レポート

1) (a) 任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に対して，

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

が成り立つことを証明せよ。

(b) 微分型のマクスウェル方程式（講義ノートの式 (3.10)）を用いて，

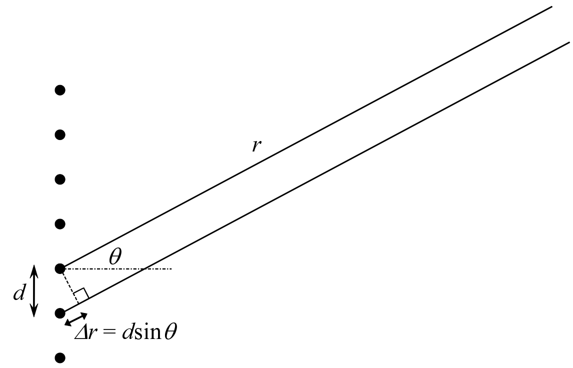
$$\nabla\cdot\boldsymbol{i}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1}$$

が成り立つことを示せ。

(c) ガウスの定理を用いて，式 (1) を積分型に書き直せ。

(d) 上で得られた式は，物理的に何を意味しているか。簡潔に説明せよ。

2) 下図のように同種の原子が 1 次元に配列した構造（1 次元結晶）が放出する光について考えよう。N 個の原子が間隔 d で等間隔に並んでおり，これらが同位相の振動電場を放出するとする。これを十分遠方（結晶からの距離 r ($r\gg d$)，1 次元結晶の法線からの振れ角 θ）で観測した光強度を計算する。



(a) まず最初に $N=1$ の場合を考えよう。原子の分極が紙面に垂直方向に角振動数 ω で振動している場合は，観測位置での光電場は θ によらず

$$E_1=\frac{A}{r}\cos(kr-\omega t)=\frac{A}{r}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}r-\omega t\right) \tag{2}$$

となる（$\lambda=2\pi c/\omega$）。光電場振幅 E の光の強度は $\epsilon_0 c|E|^2$ の時間平均（光の振動周期よりも十分長い時間での平均）$\langle\epsilon_0 c|E|^2\rangle$ で与えられる。この場合の光強度が

$$I_{\mathrm{single}}=\left\langle\epsilon_0 c|E_1|^2\right\rangle=\frac{\epsilon_0 c}{2r^2}A^2 \tag{3}$$

となることを確認せよ。

(b) $N=2$ の場合について計算しよう。光電場は 2 原子からの電場の和

$$E_1+E_2=\frac{A}{r}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}r-\omega t\right)+\frac{A}{r}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r+\Delta r)-\omega t\right] \tag{4}$$

となる。これを用いて，光強度が

$$I=\left\langle\epsilon_0 c|E_1+E_2|^2\right\rangle=4I_{\mathrm{single}}\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)=I_{\mathrm{single}}\frac{\sin^2\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)} \tag{5}$$

で与えられることを示せ。

(c) 一般の N に対しては

$$I=I_{\mathrm{single}}\frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)} \tag{6}$$

となることが示せる。$d=0.3$ nm，$\lambda=0.5$ μm として，i) $N=500$（$Nd=0.3\lambda$）ii) $N=5000$（$Nd=3\lambda$）iii) $N=50000$（$Nd=30\lambda$）のそれぞれの場合の光強度の θ 依存性のグラフを描け。$-90^\circ\le\theta\le 90^\circ$ の範囲を図示すること。

12 月 26 日（月）の講義開始時に講義室で提出すること。